BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIII
B
48
NAPOLI

XIII

ELEMENTI
DI GEOMETRIA
TEORICO-PRATICA
AD USO DELLE SCUOLE
DI
FRANCESCO SOAVE
C. R. S.

Edizione diligentemente corretta.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

NAPOLI 1802.

PRESSO MICHELE MORELLI
A spese di Saverio d' Onofrio, e Raffaele Palma ſtrada S. Liguoro num. 38. e 43.

Con licenza de' Superiori.

ELEMENTI
DI GEOMETRIA.

INTRODUZIONE.

1. OGni corpo è lungo, largo e profondo. Quindi in ogni corpo sempre concorrono le tre dimensioni *lunghezza*, *larghezza*, e *profondità*, o *altezza*: i quali due ultimi vocaboli significano lo stesso.

2. Queste tre dimensioni, benchè si trovino riunite in ogni corpo, col pensiero però si possono considerare o separatamente, o a due a due.

Considerando una sola dimensione, per esempio la lunghezza, si ha l'idea della *linea*. Considerando due dimensioni unitamente, per esempio la lunghezza e la larghezza, si ha l'idea della *superficie*. Considerando tutte e tre le dimensioni insieme, cioè la lunghezza, la larghezza, e la profondità, si ha l'idea del *solido*.

Ciascuna di queste tre grandezze con nome generico chiamasi *quantità estesa*.

Quindi si hanno tre differenti specie della quantità estesa, cioè la linea, la superficie, ed il solido.

3. La *Geometria* è la Scienza, che contempla le proprietà, i rapporti, e la mi-

sura di queste tre specie della quantità estesa (*a*).

Essa perciò si divide in tre parti: nella prima trattasi delle linee, nella seconda della superficie, nella terza dei solidi.

4. La Geometria si distingue ancora in *teorica*, ed in *pratica*: nella teorica si dimostrano, e si spiegano le verità enunciate nelle proposizioni geometriche; nella pratica s' insegna il modo di far uso della teorica.

Lo scopo di questi brevi Elementi è di dare le principali nozioni della Geometria, e d' insegnare a sciogliere i problemi, che sembrano i più adattati alla pratica, ed alle arti. Per maggior intelligenza di questi problemi si sono ad essi frammischiate alcune proposizioni prese dalla teorica, e dimostrate colla dovuta brevità e chiarezza.

5. Le proposizioni geometriche si distinguono coi diversi nomi di *Assioma*, *Teorema*, *Problema*, *Lemma*, *Corollario*, e *Scolio*.

L' assioma è una verità tanto manifesta, che

(*a*) *Geometria* è un vocabolo greco, che significa misura della terra. Alcuni Autori pretendono, che questa scienza abbia avuta la sua origine dagli Egizj, i quali furono costretti ad inventarla per misurare le loro terre, e per ristabilirvi que' confini, che tratto tratto venivano cancellati dalle inondazioni del Nilo. Dopo qualche tempo i medesimi si applicarono a farvi delle ricerche più sublimi, e generali; e così da un' arte puramente meccanica fecero nascere la più utile tra le scienze matematiche, alla quale tuttavia si dà il nome di *Geometria*.

che non ha bisogno di dimostrazione.

Il Teorema è una proposizione, in cui si prende a dimostrare qualche verità.

Nel Problema si propone di fare qualche ricerca, o qualche operazione.

Il Lemma è un teorema, ed un problema, che si premette per rendere più facile un altro teorema, o problema.

Il Corollario è una conseguenza, che si cava da qualche teorema, o problema.

Lo Scolio è un' osservazione, che fassi o per maggiore rischiarimento, o per mostrar l' uso di qualche proposizione.

Assiomi.

6. Primo. Un tutto è eguale alla somma di tutte le parti, nelle quali può esser diviso, ed è maggiore di ciascuna di queste parti.

2. Se due quantità sono eguali ciascuna ad una terza quantità, sono eguali tra loro.

3. Le quantità tra loro eguali si possono scambievolmente sostituire l'una all' altra.

4. Se quantità eguali vengono o accresciute, o diminuite, o moltiplicate, o divise per quantità eguali, le somme, o i residui, o i prodotti o i quoti sono eguali.

5. Sono perfettamente eguali tra loro due grandezze geometriche della stessa specie, le quali sovrapposte l'una all'altra si adattano, e confondono in tutte le loro parti. Questo modo di provare l' eguaglianza tra le grandezze è molto usato nella Geometria, e si chiama *metodo di sovrapposizione*.

PARTE PRIMA

GEOMETRIA LINEARE.

CAPO PRIMO.

Di alcune proprietà della linea retta, e circolare.

7. LA linea ha una sola dimensione, che è la sua lunghezza. Ciascuna estremità della linea dicesi *punto*. Dunque il punto è privo di ogni dimensione, ed è indivisibile.

La linea può concepirsi generata in questo modo. Se un punto si muove comunque nello spazio, e lascia dietro di se la traccia del suo moto, descrive in questa traccia la linea.

8. Le linee si distinguono in *rette*, e *curve*.

Si supponga, che tra due punti A, B (Fig. 1) siano tirate più linee ACB, ADB, AEB, e che ciascuna di queste si aggiri intorno ai punti AB: tra queste linee si chiama *retta* quella ACB, che in questo suo rivolgimento si mantiene sempre nella sua prima situazione; e *curva* ogni altra ADB, o AEB, che non si mantiene nella sua prima situazione, ma che anzi ne può prendere una del tutto contraria AFB, o AGB.

Lo stromento per tirare delle rette sopra la carta è una *riga* di legno, o di metallo.

9. Le

9. Le principali proprietà della linea retta sono: 1. Che essa è la più breve di tutte le linee, che si possono tirare tra due punti A, B.

2. Due soli punti bastano a fissare la sua posizione.

3. Quindi se due rette hanno due punti comuni, esse si confondono in una sola.

4. Se si hanno due rette AB, CD (Fig. 2), e si sovrappone l'una di esse CD all'altra AB, in modo che due punti di CD cadano sulla AB, all'istante della sovrapposizione non apparirà che una retta sola.

5. La linea retta può prolungarsi ad arbitrio di ambe le parti.

6. Colla linea retta si rappresenta la distanza tra due dati punti; poichè questa distanza non è che il più corto spazio tra i medesimi due punti.

7. Più punti A, E, F, B (Fig. 2) sono nella stessa direzione, quando sono così disposti, che una retta tirata per due qualunque di essi per esempio A, B passa ancora per gli altri punti E, F.

10. Il *piano* è una superficie qualunque, sopra la quale si possono condurre delle rette per ogni verso. D'ordinario le figure Geometriche si suppongono descritte sopra dei piani.

11. Problema I. Esaminare se la riga, che deve servire a condurre delle rette sopra la carta, sia esatta (Fig. 3).

Risoluzione. Col mezzo della riga si ti-

ri sulla carta una linea AB; tenendo fisse le estremità del lato della riga sopra l'estremità della AB, sul piano della carta intorno alla AB si rivolti la riga dalla parte C alla parte D, e lungo il suo lato AB si tiri sulla carta un' altra linea. Se questa seconda linea si confonde perfettamente colla prima, la riga è esatta; ma se la seconda linea non si confonde perfettamente colla prima, la riga non è esatta.

12. Problema II. Tra due dati punti A, B condurre una retta (Fig. 3).

Risoluzione. Se questi due punti sono vicini, si applichi ad essi il lato di una riga, e lungo questo lato sul piano in cui giacciono i punti A, B si tiri una retta. Se la distanza dei punti A, B supera la lunghezza ordinaria di una riga, per essi punti si faccia passare un filo, od una cordellina ben tesa, e lungo questo filo, o questa cordellina si segni una retta.

13. Problema III. Esaminare se due rette AB, CD sono eguali, o diseguali tra loro (Fig. 4).

Risoluzione. Sopra una delle rette per esempio AB si applichi l'altra CD, mettendo l'estremità C sopra l'estremità A, ed un altro punto qualunque di CD sopra la stessa AB. Se in questa sovrapposizione l'estremità D della CD cade sull'estremità B della AB, le due rette AB, CD saranno eguali tra loro: se D cade tra A, e B, sarà CD minore di AB; e se in ve-

vece di B si trova tra A, e D, sarà CD maggiore di AB.

14. Corollario. Supposte diseguali le due rette AB, CD sarà BD la differenza loro. Dunque col mezzo della sovrapposizione si determina la differenza tra due date rette.

15. Problema IV. Date due rette AB, CD cercare una retta, che sia eguale alla somma loro (Fig. 5).

Risoluzione. Si prolunghi l'una delle due rette per esempio AB da una delle due estremità B, e si faccia il prolungamento BE eguale all'altra retta CD. Sarà AE eguale alla somma delle due rette AB, CD.

16. Problema V. Sommare più rette AB, CD, EF, GH (Fig. 6).

Risoluzione. Si prolunghi l'una di queste rette per esempio AB ad una delle estremità B; sopra il prolungamento si prendano di seguito le parti BP, PQ, QR per ordine eguali alle rette CD, EF, GH. Sarà AR eguale alla somma delle date rette.

17. Misurare una retta significa cercare quante volte essa contiene un'altra retta conosciuta e determinata, la quale si chiama *unità di misura*.

Ogni paese ha una, o più rette di determinata lunghezza con cui misurare le altre rette. Per esempio in Milano pel commercio si adopera comunemente una retta rappresentata dalla lunghezza del braccio, la quale si divide in 12 parti eguali chiamate *oncie*, ciascuna delle quali si divide parimente in 12 parti eguali chiamati *punti*.

Nella misura dei terreni s' adopera un'altra retta molto più lunga chiamata *trabucco*. Questo trabucco si divide in 6 parti eguali chiamate *piedi* di trabucco : ciascun piede si divide in 12 parti eguali dette *once di trabucco*, e ciascun' oncia in 12 *punti*. Il trabucco di Milano è lungo braccia 4 once 4 e punti 8.

18. La lunghezza del trabucco in diverse parti della Lombardia è diversa : così in Milano è once 72.

In Pavia è once 78 del trabucco Milanese.

In Lodi è once 75 del suddetto trabucco.

In Como è once 74 e punti 8 del suddetto.

In Cremona è once 80 del suddetto.

In Mantova è once $77\frac{24}{100}$ del suddetto.

In ciascuno di questi siti però la divisione del trabucco è simile a quella del trabucco Milanese ; laonde diverse vi si osservano le lunghezze dei piedi, e delle once del trabucco. Parimente si deve avvertire che in Milano l'oncia del trabucco è ben diversa dall' oncia del braccio, mentre per essere il trabucco braccia 4 once 4 e punti 8, cioè once 52 e punti 8 del braccio, ne segue, che once 52 e punti 8 del braccio equivalgono alle once 72 del trabucco ; ed un' oncia del braccio è circa oncia 1 punti $4\frac{2}{5}$ dello stesso trabucco.

19. Il modo adunque di misurare una data retta AB (Fig. 7) con una data unità di misura MN consiste nell' applicare questa MN alla AB quante volte si può andan-

dando di seguito da una sua estremità A all' altra B, e nel contare il numero delle volte, che la MN sta in AB: se l' unità di misura MN è il braccio, si avrà la misura della AB in braccia: se l' unità di misura MN è il trabucco, si avrà la misura della AB in trabucchi.

20. La misura più celebre, e più universalmente adottata dai Matematici è il *piede* accademico di Parigi. Questo piede si divide in 12 *pollici*, e ciascun pollice in 12 *linee*. Sei piedi formano un' altra misura conosciuta sotto i nomi di *Esapeda*, *Tesa* o *Pertica Parigina*. Il rapporto tra il piede Parigino, ed il braccio Milanese si è, che 11 piedi di Parigi equivalgono prossimamente a 6 braccia di Milano.

21. Tra le curve, che si possono immaginare, il circolo è il solo, di cui trattasi nella Geometria elementare.

Se una retta AC (Fig. 8) posta sopra un piano, e fissata ad una delle due estremità C si aggira intorno alla stessa coll' altra estremità A descrive una curva rientrante, la quale si chiama *circolo*, ovvero *circonferenza*, o *periferia* del *circolo*.

Il punto C, intorno a cui si aggira la retta AC nel generare il circolo si chiama *centro*.

La retta AC, o qualunque altra CD tirata dal centro alla periferia *raggio*.

Qualunque retta AD condotta nel circolo, che termina d' ambe le parti alla circonferenza *corda*.

Una corda AB, che passa pel centro *diametro*.

Una porzione qualunque AMD della circonferenza *arco*.

22. Lo stromento più comune per descrivere il circolo è il *compasso*.

Data una retta AC si apre il compasso per modo, che la distanza delle due punte sia eguale alla lunghezza di AC; si pone una punta dello stesso compasso in qualche punto C di un piano; si fa girare il compasso intorno a C, e coll' altra punta si segna sul piano un circolo. Se la AC è molto grande, in vece del compasso si attacca al punto C l' estremità di un filo, o di una cordellina della lunghezza di AC; si tende questa cordellina; fassi con essa un giro intorno a C, e col mezzo di una punta d' acciajo, o d' altro attaccato all' altra estremità della cordellina si segna sul piano un circolo.

23. Dalla natura del circolo si hanno le seguenti di lui proprietà.

1 Il centro equidista da tutti i punti della circonferenza.

2 Quindi tutti i raggi di uno stesso circolo sono eguali tra loro.

3 Tutti i diametri di uno stesso circolo sono eguali tra loro; poichè ciascuno è la somma di due raggi.

4 Ciascun diametro divide la periferia del circolo in due parti eguali.

5 I circoli, che hanno raggi, o diametri eguali, sono eguali.

24. La circonferenza di qualunque circolo d' ordinario si suppone divisa in 360 parti od archetti eguali, che chiamansi *gradi*. Il grado si divide in 60. parti eguali chiamate *minuti primi*. Il minuto primo si divide in 60 parti eguali chiamate *minuti secondi*. Parimente il minuto secondo si divide in 60 *minuti terzi*, e così di seguito.

I gradi s' indicano con un zero scritto in alto alla destra del loro numero; i minuti primi con una lineetta scritta allo stesso sito; i secondi con due lineette ec. Per esempio volendo indicare un arco di 25 gradi 16 minuti, e 48 secondi si scriverà $25^{\circ}.16'.48''$.

25. Dalla generale divisione dei circoli in 360 segue, che nei circoli eguali i gradi, i minuti, i secondi ec. sono di eguale grandezza, e nei circoli diseguali, i gradi, i minuti, i secondi sono di differente grandezza. Per esempio in due circoli eguali il grado di uno è eguale in grandezza al grado dell' altro, il minuto di uno è eguale al minuto dell' altro; ed all' opposto in due circoli diseguali il grado del circolo maggiore è il più grande del grado del circolo minore, il minuto del circolo maggiore è più grande del minuto del circolo minore ec.

CAPO II.

Degli Angoli rettilinei. e della misura loro.

26. DUe linee rette AC, BC (Fig. 9). che s'incontrano in qualche punto C, formano ciò che si chiama *angolo rettilineo*.

Il punto C, in cui s' incontrano le due rette, dicesi *vertice* dell' angolo, e le due rette AC, BC si chiamano *lati* dell'angolo.

Un angolo poi si enuncia o con una lettera, che si scrive vicino al vertice fuori o dentro della sua apertura, ovvero con tre lettere, che si scrivono l'una vicino al vertice, e le altre due lungo i lati, avvertendo però di metter sempre nel mezzo la lettera scritta al vertice. Per esempio volendo nominare l' angolo formato dalle due rette AC, BC si pronuncia l'angolo C, ovvero l' angolo M, ovvero l' angolo ACB.

27. Sianvi due angoli ABC, DEG (Fig. 10.), e si sovrapponga l' uno di essi per esempio ACB all'altro DEG, facendo cadere il vertice C sul vertice E, ed il lato AC sul lato DE. Se il lato CB cade sul lato EG, l' angolo ACB è eguale all'angolo DEG; e se CB non cade sul lato EG, i due angoli ACB, DEG sono diseguali; cioè se CB cade fuori dell'apertura dell'angolo DEG, l' angolo ACB è maggiore dell'angolo DEG; e se CB cade dentro l' apertura dell'angolo DEG, l' angolo

ACB

ACB è minore dell' angolo DEG.

28. Da tutto ciò si ricava, che la maggiore o minore grandezza di un angolo dipende soltanto dalla maggiore, o minore apertura dei suoi lati, e non dalla lunghezza dei medesimi, e che quantunque questi si allunghino, o si accorcino, l' angolo rimane sempre lo stesso.

29. Se si prolungano i lati dell' angolo ACD (Fig. 11.) oltre il vertice C, si hanno i quattro angoli *m*, *n*, *p*, *q*. Di questi quattro angoli due qualunque vicini si chiamano *angoli contigui o adjacenti*: tali sono i due angoli *m*, *n*; i due *n*, *p*; i due *p*, *q*; e i due *m*, *q*.

Due angoli formati in parti opposte si chiamano *angoli verticali*, *o angoli opposti al vertice*: tali sono i due angoli *m*, *p*, e i due *n*, *q*.

30. Sia ACB (Fig. 12) un angolo qualunque. Col centro C, e con un raggio arbitrario AC sia descritto tra i lati di questo angolo un arco di circolo AB, e da C siano condotti dei raggi in qualunque numero, che dividano l' angolo ACB in parti tra loro eguali ACD, DCE, ECF ec. E' chiaro, che sovrapponendo l' angoletto ACD a ciascuno degli altri angoletti eguali, l' archetto AD si confonderà esattamente con ciascuno degli archetti DE, EF, e G ec., cioè tutti questi archetti saranno eguali tra loro, e il loro numero sarà eguale al numero degli angoletti, in cui è diviso l' angolo ACB. Dunque l' angolo ACB,

e il suo arco AB saranno divisi in uno stesso numero di parti eguali. Questa esatta corrispondenza di parti, che trovasi nella divisione di un angolo qualunque ACB, e dell' arco di circolo AB descritto dal vertice di quest' angolo, e compreso tra i lati dello stesso, ha indotto i Geometri a servirsi degli archi del circolo per misurare gli angoli rettilinei nel modo seguente.

Si fà centro al vertice C dell' angolo dato ACB, e con raggio arbitrario AC si descrive un circolo od una porzione di circolo: l' angolo ACB si dice di tanti gradi, di quanti gradi è l' arco AB compreso dai lati AC, CB.

32. Quindi se col centro al vertice C di un angolo qualunque ACB (Fig. 13), e con diversi raggi CA, CD, CE si descriveranno più circoli, gli archi AB, DF, EG compresi dai lati dell' angolo saranno di un egual numero di gradi, poichè ciascuno farà misura dello stesso angolo ACB.

Lo stromento per misurare gli angoli è un semicircolo di metallo diviso in 180°, del quale parlerassi fra poco.

32. Un angolo ACB si dice *retto*, se l' arco AB, che lo misura, è di 90°, cioè la quarta parte del circolo; *ottuso* se l' arco AB è maggiore di 90°; *acuto* se AB è minore di 90°. Quindi si hanno tre specie di angoli rettilinei; cioè il retto, l' ottuso, e l' acuto. Generalmente un angolo se non è retto si dice *obliquo*.

Si chiama *complemento* di un angolo la sua

sua differenza coll' angolo retto, e *supplemento* la sua differenza coi due angoli retti.

33. Teorema I. Una retta CD, che cade sopra un' altra AB, fa due angoli contigui, la cui somma equivale a 180°, (Fig. 14).

Dimostrazione. Col centro C, e con un raggio arbitrario AC si descriva il semicircolo ADB. L' angolo *m* sarà misurato dall' arco AD, e l' angolo *n* dall' arco DB. Ora questi due archi AD, DB presi insieme fanno il semicircolo ADB, cioè 180°: dunque i due angoli contigui *m*, *n* equivalgono insieme a 180°.

34. Corollario I. I due angoli contigui *m*, *n* equivalgono a due angoli retti, poichè 180° fanno due volte 90°, e ciascuno è supplemento dell' altro.

35. Corollario II. Se si conosce uno dei due angoli contigui, si conoscerà anche l' altro sottraendo l' angolo cognito da 180°; e se uno è retto, sarà retto anche l' altro.

36. Corollario III. Se si prolunghi CD oltre C, e si descriva il semicircolo inferiore AEB, la somma dei due angoli *p*, *q* sarà pure eguale a 180°, ossia a due angoli retti: dunque la somma dei quattro angoli *m*, *n*, *p*, *q* sarà eguale a 360°, cioè a 4 angoli retti.

37. Teorema II. Se due rette AB, DE si tagliano in qualche punto C, gli angoli verticali sono eguali tra loro (Fig. 14).

Dimostrazione. Col centro C e con un raggio arbitrario AC si descriva un circolo ADBE. La somma dei due angoli contigui

tigui m, n equivale a 180°; la somma dei due angoli n, p equivale pure a 180°: dunque la somma dei due contigui m, n è eguale alla somma dei due contigui n, p; e però levando da ciascuna di queste due somme eguali l'angolo comune n, risultano eguali tra loro i due angoli residui e verticali m, p.

Parimente è eguale a 180° la somma dei due angoli contigui m, n, e la somma dei due contigui, m, q: dunque la somma dei due angoli m, n è eguale alla somma dei due m, q, e levando da ciascuna di queste due somme l'angolo m, saranno eguali tra loro i due angoli residui e verticali n, q.

38. Corollario I. Se uno dei quattro angoli m, n, p, q è dato, saranno dati ancora gli altri tre: poichè se è dato m, si avrà n levando m da 180°, e sarà p eguale ad m, e q eguale ad n.

39. Corollario II. Se uno dei quattro angoli m, n, p, q è retto, saranno retti ancora gli altri tre: poichè se m è di 90°, n suo supplemento sarà pure di 90°, p eguale ad m sarà di 90°, e così q eguale ad n sarà di 90°.

40. Teorema III. Se allo stesso punto C, e dalla stessa parte della A B (Fig. 15) vengono tirate delle rette in qualunque numero C D, C E, C F, la somma degli angoli m, n; o, p formati in C da queste rette è eguale 180°, cioè a due angoli retti.

Dimostrazione. Si faccia centro in C, e con

con un raggio arbitrario AC si descriva un circolo. Gli angoli *m*, *n*, *o*, *p* saranno misurati dagli archi intercetti, e corrispondenti AD, D, E, F, FB, la cui somma è il semicircolo AEB, cioè 180°.

41. Corollario. Alla somma di 180°, o di due angoli retti equivalgono ancora gli angoli *q*, *r*, *s*, *t* formati in C da più rette tirate dall'altra parte della AB: dunque la somma di tutti gli angoli formati da più rette condotte per ogni verso sopra un piano intorno ad un punto C è di 360°. cioè di 4 angoli retti.

42. Teorema IV. Nello stesso circolo, e in circoli eguali, gli angoli eguali al centro, cioè che hanno i loro vertici al centro, comprendono archi, e corde eguali, e viceversa le corde, e gli archi eguali sono compresi da angoli eguali al centro (Fig. 16).

Dimostrazione. Sia l'angolo ACB eguale all'angolo EFG, e AC eguale ad EF. Si sovrapponga l'angolo ACB all'angolo EFG, mettendo AC sopra EF, e C sopra F. Cadrà CB sopra FG, A sopra E, e B sopra G: quindi l'arco ADB cadrà precisamente sopra l'arco EHG, e la corda AB sopra la corda EG: dunque saranno eguali tra loro i due archi ADB, EHG, e le corde AB, EG. Collo stesso principio della sovrapposizione si dimostrerà la proposizione inversa, cioè che in uno stesso circolo, o in circoli eguali gli archi, e le corde eguali sono compresi da angoli eguali al centro.

Pro-

Problema VI. Dati due angoli sopra la carta C, F cercare se essi sono eguali, o diseguali (Fig. 16).

Risoluzione. Si faccia centro nei due vertici C, ed F, e con raggi eguali AC, EF si descrivano i due archi ADB, EHG, e si tirino, e poscia si confrontino tra loro le due corde AB, EG. Se queste corde saranno eguali, saranno pure eguali i due angoli CF; e se le due corde saranno diseguali, ancora i due angoli saranno diseguali.

44. Problema VII. Fare un angolo eguale ad un dato ACB (Fig. 16).

Risoluzione. Si faccia centro al vertice C del dato angolo, e con un raggio arbitrario AC si descriva un arco di circolo ADB; si faccia centro in qualche punto F di una retta FE, e con un raggio eguale ad AC si descriva un arco indeterminato EHG; si prenda la distanza AB, e col centro E, e raggio EG eguale ad AB si descriva verso G un altro archetto di circolo, che intersechi in qualche punto G l'arco EHG, e si tiri FG: l'angolo EFG sarà eguale al dato ACB; poichè questi due angoli sono ai centri dei circoli descritti, hanno raggi eguali, e sottendono corde eguali.

Se l'angolo ACB è dato sopra un gran piano, e sopra il terreno, si attacchi in C l'estremità di una corda di lunghezza arbitraria AC; e col centro C, e raggio AC si descriva l'arco ADB; colla stessa corda AC attaccata per una estremità in F si descri-

scriva un arco indeterminato EHG; si prenda la distanza AB, e col centro E, e con un' altra corda EG eguale alla AB si descriva un altro arco, che tagli l'arco EHG in qualche punto G, e si guidi FG. L'angolo EFG sarà eguale al dato ACB.

45. Problema VIII. Misurare un angolo ACD col semicircolo graduato (Fig. 17).

L' istromento, che serve a misurare gli angoli sopra la carta, è una lastra di metallo ADB piegata in semicircolo, e divisa in gradi. Quest' istromento si chiama *semicircolo graduato*.

Risoluzione. Al lato dell' angolo ACD si applichi il diametro del semicircolo graduato, facendo cadere il di lui centro sopra il vertice C dell' angolo, e si osservi di quanti gradi sia l' arco AD del semicircolo compreso dai lati AC, CD. Questo numero di gradi sarà la misura dell'angolo ACD.

46. Problema IX. Sulla retta AC nel punto C formare un angolo di un dato numero di gradi (Fig. 17).

Risoluzione. Alla retta AC si applichi il diametro del semicircolo graduato mettendo il di lui centro al punto C della AC; dal centro C al punto D dell' istromento, che indica il dato numero di gradi, si tiri una retta CD, e si avrà l'angolo proposto ACD.

CA-

to B col punto A, e la retta BD si confonderà in tutta la sua lunghezza colla AD. Dunque AD, DB saranno eguali, cioè il punto D sarà equidistante dalle estremità della AB.

50. Scolio: Ha luogo ancora la proposizione inversa della precedente, cioè se ogni punto della CD equidista dalle estremità della AB sarà essa CD perpendicolare alla AB nella sua metà C. Inoltre, siccome due soli punti bastano per fissare la posizione di una retta; così basta, che la CD abbia due punti ciascuno equidistante dalle estremità di AB per avere ogni altro punto equidistante dalle medesime estremità, e per essere perpendicolare alla AB nella sua metà C.

51. Teorema VI. Se da un punto qualunque D preso fuori della retta AB saranno condotte a questa retta perpendicolare DC, ed una obliqua qualunque DA, la perpendicolare DC sarà minore dell' obliqua DA (Fig. 19).

Dimostrazione. Si prolunghi DC verso E facendo CE eguale a CD, e si meni AE. Sarà AC perpendicolare alla metà della DE, e perciò saranno eguali le due oblique AD, AE. Inoltre sarà DE minore della somma delle stesse oblique AD, AE, e la metà di DE sarà minore della metà di questa somma: dunque sarà DC minore di AD.

52. Corollario I. Da un punto D non si può condurre alla AB, che una sola per-

pen-

pendicolare DC; poichè questa è minore di ogni altra retta DA condotta da D alla AB.

53. Corollario II. Sopra la perpendicolare DC si deve misurare la distanza del punto D dalla retta AB; poichè questa distanza è il più corto spazio tra il punto D, e la retta AB.

54. Lo stromento più comodo per condurre delle perpendicolari, e formare angoli retti sopra la carta, o sopra un piano è la *squadra* o *norma*, la quale è composta di due righe AC, DC di metallo, o di legno unite ad angolo retto ACD (Fig. 20).

55. Problema X. Esaminare se la squadra sia esatta:

Risoluzione. Sulla carta si tiri una retta AB (Fig. 21); a questa retta si applichi un lato AC della squadra, e lungo l'altro lato CD si segni sulla carta un' altra linea CM. Si rivolti la squadra intorno C, facendo cadere il lato AC sopra CB, e si osservi, se dopo questo rivolgimento il lato CD si combaccia colla CM: in tal caso la squadra è esatta; ma se CD non combaccia colla CM, la squadra non è esatta.

56. Problema XI. Da un punto C di una retta data AB alzare una perpendicolare alla stessa AB.

Prima Soluzione colla squadra. Sulla AB (Fig. 22) si applichi il lato della squadra; mettendo il vertice della medesima nel punto C; e lungo l'altro lato CD si tiri sulla carta

carta la linea CD, la quale sarà perpendicolare in C alla AB.

2. Soluzione. Colla riga, e col compasso. Sulla AB (Fig. 23) a destra, ed a sinistra del punto C si prendano ad arbitrio le parti eguali CE, CF; centro in E ed in F, con una stessa apertura di compasso si descrivano due archetti *mm*, *nn*, che si seghino in qualche punto D, e tra i punti C, e D si tiri CD, la quale sarà perpendicolare alla AB; poichè ciascuno di due punti C, D della CD è equidistante dai punti E, F della AB (num. 50.).

3. Soluzione. Per condurre questa perpendicolare sopra un gran piano (Fig. 23) si attacchi in C l' estremità di una corda CE di arbitraria lunghezza; col centro C, e colla CE per raggio si segnino sulla AB due punti E, F equidistanti da C. Con un' altra corda maggiore di EC presa per raggio, ed attaccata a ciascuna delle sue estremità, cioè ora in E, ed ora in F, si faccia un' intersecazione d' archetti D, e si tiri CD.

Questa soluzione è simile alla precedente, fuorichè si sono sostituite delle corde alle piccole rette EC, ED.

57. Problema XII. *Esaminare di quale specie sia un dato angolo ACB senza far uso del semicircolo graduato.*

Risoluzione. Dalla parte del vertice C del dato angolo si prolunghi, se abbisogna, il lato AC, e pel problema precedente si innalzi in C a questo lato una perpendico-

lare CD. Questa perpendicolare cadrà o sopra il lato CB (Fig. 24), o a sinistra (Fig. 25), o a destra dello stesso lato (Fig. 26). E' evidente, che l' angolo ACB sarà retto nel primo caso, ottuso nel secondo, ed acuto nel terzo.

58. Problema XIII. Da un punto D preso fuori di una data retta AB condurre una perpendicolare a questa retta.

1. Soluzione. Colla squadra (Fig. 22). Se il punto D è vicino alla retta AB, sopra questa retta si applichi il lato AC di una squadra; questa si faccia scorrere sulla AB, finchè coll' altro lato DC s' incontri il punto D, e si tiri DC. Sarà DC la perpendicolare cercata.

2. Soluzione. Colla riga, e col compasso. Col centro D (Fig. 27.), e con un raggio arbitrario DE si descriva un arco, che seghi la AB in due punti EF. Centro in ciascuno di questi due punti, e con uno stesso raggio si descrivano da una stessa parte della AB i due archetti *mm*, *nn*, che formino l' intersecazione H, e si meni la retta DH. Sarà DH perpendicolare alla AB; poichè ciascuno dei due punti D, H della DH equidista dai punti EF della AB (num. 50).

3. Soluzione. In campagna alle piccole rette o raggi DE, EH si sostituiranno corde di sufficiente lunghezza, e si farà la stessa operazione.

59. Problema XIV. Tagliare in due parti eguali una data retta AB (Fig. 28).

Ri-

Risoluzione. Centro in A, ed in B con uno stesso raggio si faccia un' intersecazione d'archi D, e dai medesimi punti con un altro raggio si faccia un'altra intersecazione d'archi E. Per queste due intersecazioni si meni la retta DE, e sarà AB divisa per metà in C; poichè per essere ciascuno dei due punti D, E della DE equidistante dalle estremità della AB, anche il punto C sarà equidistante da queste due estremità, cioè sarà AC eguale a CB.

In campagna, o sopra un gran piano ai raggi AD, AE si sostuiranno delle corde, e si faranno le stesse operazioni.

60. Teorema VII. Sia C il centro di un circolo (Fig. 29), di cui AB è una corda qualunque, e siano CA, CB due raggi condotti all'estremità della AB. Se dal centro C per la metà della corda AB si condurrà il diametro FD, sarà questo perpendicolare alla corda AB, e dividerà in mezzo l' arco ADB, e l'angolo al centro ACB.

Dimostrazione. Il diametro FD ha i due punti CE ciascuno equidistante dalle estremità della corda AB, esso è dunque perpendicolare alla metà di questa corda. Quindi se si pieghi la figura al lungo di FD, la EB cadrà sopra EA, B sopra A, CB sopra CA, e perciò l'angolo DCB sopra l' angolo DCA, e l' arco DB sopra l' arco DA. Dunque l' arco ADB, e l' angolo ACB saranno divisi in mezzo.

61. Corollario I. Se dal centro C si condurrà il raggio CD perpendicolare alla cor-

da AB, questa corda, l'arco ADB, e l'angolo ACB saranno divisi in mezzo dal raggio CD; poichè CD si confonderà col raggio condotto per la metà della AB, il quale è perpendicolare alla stessa AB, e divide in mezzo l'arco ADB, e l'angolo ACB.

62. Corollario II. Se alla metà della corde AB si alzerà una perpendicolare EF, passerà questa pel centro C, e dividerà in mezzo l'angolo ACB, e l'arco ADB, poichè EF si confonderà col raggio condotto per la metà della stessa corda AB.

63. Problema XV. Sopra una data retta AB presa per diametro descrivere un circolo (Fig. 14).

Risoluzione. Si divida AB in mezzo, e fatto centro alla metà C col raggio CA si descriva il circolo ADBE.

Problema XVI. Dividere in mezzo un dato angolo ACB (Fig. 29).

Risoluzione. Con un raggio qualunque, e col centro in C si descriva un circolo, od una porzione di circolo, che tagli in A, e B i lati dell'angolo; si tiri la corda AB; si divida essa per mezzo in E, e per E si meni il raggio CD, il quale dividerà l'angolo ACB in due parti eguali.

65. Problema XVII. Dividere in mezzo un arco di circolo ADB (Fig. 29).

Risol. Alle estremità dell' arco ADB si tiri la corda AB, e si divida essa in mezzo con una perpendicolare CD, la quale dividerà in mezzo l'arco ADB.

66. Problema XVIII. Cercare il centro di

di un dato circolo (Fig. 29).

Risoluzione. Nel dato circolo si tiri una corda qualunque AB; si divida essa in mezzo con una perpendicolare DF, la quale passerà pel centro, e sarà un diametro del circolo; si divida questo diametro per mezzo in C, e si avrà in C il centro cercato.

Altra soluzione. Si tirino due corde ad arbitrio AB, DB (Fig. 30), e si dividano queste in mezzo colle perpendicolari EH, FL: il punto C, dove queste due perpendicolari s' incontrano, sarà il centro del circolo.

67. Problema XIX. Cercare il centro di un dato arco di circolo ABD (Fig. 30).

Risol. Si menino due corde AB, BD, e si operi come nella seconda soluzione del problema antecedente.

68. Problema XX. Dati tre punti A, B, D in diversa direzione, descrivere un circolo, che passi per questi tre punti. (Fig. 30).

Risoluzione. Si uniscano i tre punti dati A, B, D colle due rette AB, BD; queste rette si considerino come due corde di un arco di circolo, che passa per i medesimi tre punti: si ricerchi come nel problema antecedente, il centro C di quest' arco, e con questo centro, e col raggio AC si descriva un circolo, che sarà quello che si cerca.

69. Corollario. Siccome un solo è il centro C, ed un solo il circolo, che si trova colla precedente soluzione, ne segue, che tre punti disposti comunque in diversa di-

rezione bastano a fissare la posizione, e la grandezza di un circolo.

70. Scolio. I cinque ultimi problemi si sciolgono in campagna coll' uso delle corde, come si è fatto in alcuni dei problemi precedenti.

CAPO IV.

Delle rette parallele.

71. DUe rette AB, CD (Fig.31) descritte sopra un medesimo piano si chiamano *parallele*, quando in tutta la loro lunghezza sono egualmente distanti l' una dall' altra.

72. Da questa semplice definizione delle rette parallele è manifesto 1. Che due rette parallele non possono mai incontrarsi, e formar angolo; poichè due rette che s' incontrano non sono in tutta la loro lunghezza egualmente distanti l'una dall' altra.

2. Che sono eguali tra loro tutte le perpendicolari calate da punti qualunque di una delle parallele all' altra; poichè ciascuna di queste perpendicolari misura la distanza tra le due parallele.

3. Che da un punto A ad una retta CD non può condursi, che una sola parallela; poichè se ciascuna delle due rette AB, AE fosse parallela alla CD, condotta da A la AC perpendicolare alla CD, ed alzata in qualche punto G alla stessa CD la perpendicolare GI, ciascuna delle due rette GH, GI

GI sarebbe eguale alla AC, cioè le due rette GH, GI sarebbero eguali tra loro, il che è falso.

73. Se due rette AB, CD (Fig. 32) poste comunque in uno stesso piano vengano tagliate da una terza retta EF, ne nascono 8 angoli, cioè i 4 interni *o*, *p*, *m*, *q*, e i 4 esterni *r*, *n*, *y*, *x*. I due angoli *m*, *p*, ovvero *o*, *q* si chiamano *interni della stessa parte*, i due angoli *m*, *o* ovvero *p*, *q* *alterni*, e ciascun angolo interno si dice *opposto* all'angolo esterno della stessa parte, come per esempio l'interno *m* è opposto all'esterno *n*.

74. Teorema VIII. Se due rette parallele AB, CD sono tagliate comunque da una terza retta EF, l'angolo interno *m* è eguale all'opposto esterno *n* (Fig. 32).

Dimostrazione. Supponiamo, che la retta EF sia tagliata in qualche punto H, e che la porzione EH, a cui resta unita la retta AB, scorra a lungo dell'altra porzione HF, in modo però che la retta AB si discosti dal piano della carta. E'evidente, che la AB nell'avvicinarsi alla CD avrà sempre tutti i suoi punti egualmente distanti dalla CD, e che nel momento, che il punto *n* giugne in *m*, la AB cadrà tutta sulla CD, e l'angolo *n*, che non si cambia durante il moto della AB, si confonderà coll'angolo *m*: dunque l'angolo *n* sarà eguale all'angolo *m*.

75. Corollario I. Quindi se l'angolo *m* sarà retto, sarà retto ancora il suo opposto

esterno *n*; cioè, se EF sarà perpendicolare ad una delle parallele, sarà perpendicolare ancora all' altra.

76. Corollario II. Le due parallele AB, CD essendo tagliate dalla EF, saranno eguali tra loro gli angoli alterni *m*, *o*, poichè l' angolo *m* è eguale al suo opposto esterno *n*, e questo al suo verticale *o*.

77. Teorema IX. Due rette AB, CD sono parallele; allorchè essendo tagliate da una terza EF, formano l' angolo interno *m* eguale all' opposto esterno *n* (Fig. 32).

Dimostrazione. Pel teorema precedente una parallela condotta dal punto *n* alla CD forma l' angolo *n* eguale all' angolo *m*: dunque questa parallela si confonde colla AB, la quale pure forma l' angolo *n* eguale ad *m*: dunque le due rette AB, CD sono parallele.

78. Corollario I. Quindi se EF sarà perpendicolare a ciascuna delle due rette AB, CD, saranno retti, e perciò eguali i due angoli *m*, *n*. Dunque se due rette sono perpendicolari ad una terza, sono tra lor parallele.

79. Corollario II. Due rette AB, CD sono parallele, allorchè essendo tagliate da una terza EF, formano eguali gli angoli alterni *m*, *o*; poichè *o* è eguale ad *n*, onde l' interno *m* è eguale al suo opposto esterno *n*.

80. Corollario III. Se due rette AB, CD (Fig. 33.) sono parallele ad una terza retta GH, sono parallele tra loro; poichè tagliate

gliandole tutte e tre colla EF, sarà l'angolo *m* eguale ad *o*, ed *o* eguale ad *n*, e perciò *m* eguale ad *n*.

81. Lo stromento, che comunemente si adopra per tirare delle parallele vicine sopra la carta, è composto di due righe eguali di metallo o di legno AB, CD unite insieme ad eguali intervalli EG, FH col mezzo di due laminette eguali EF, GH mobili nei 4 punti di unione E, G, H, F. Quest'istromento si chiama *parallelo* (Fig. 34).

82. Problema XXI. Da un punto M da fuori di una retta AB tirare una parallela a questa retta.

1. Soluzione. Se il punto M è vicino alla AB (Fig. 35), si applichi a questa retta una riga del parallelo; si tenga ferma l'altra riga CD, e si faccia scorrere la prima verso M, e quando questa tocca il punto M, lungo la stessa riga si tiri la retta MN, la quale sarà parallela alla AB; se però il parallelo è esatto: lo che si conoscerà, osservando se due perpendicolari calate da due punti qualunque della MN sono tra loro eguali.

2. Soluzione. Da M (Fig. 36) si cali alla AB la perpendicolare MA, ed in M alla AM s'inalzi la perpendicolare MN, che sarà parallela alla AM (num. 78).

3. Soluzione Da M (Fig. 36) si cali alla AB la perpendicolare MA, ed in qualche punto B della AB diverso dal punto A s'inalzi alla stessa AB la perpendicolare BN; si prenda BN eguale ad AM, e

tra i punti M, N si guidi la MN, che sarà parallela alla AB.

4. Soluzione. Dal punto M (Fig. 37) alla AB si tiri una retta qualunque BM; col centro in B, e col raggio BM si descriva l'arco AM, e col centro M e collo stesso raggio BM si descriva l'arco indeterminato BN; si faccia centro di nuovo in B, e con un raggio eguale alla distanza AM si descriva un altro archetto, che seghi in qualche punto N l'arco BN, e si conduca la MN, la quale sarà parallela alla AB: poichè per la costruzione essendo eguali i due archi AM, BN, sono ancora eguali i due angoli alterni x, y (num. 79).

83. Scolio. In campagna si può usare ciascuna delle tre ultime soluzioni, sostituendo delle corde alle diverse aperture di compasso.

CAPO V.

Dell'uso pratico di alcuni istrumenti.

84. SI chiama *orizzontale* una superficie, i di cui punti sono tutti equidistanti dal centro della terra: la superficie di un lago, di uno stagno, e di qualunque corpo d'acqua, in cui non si scopre alcun moto, riguardasi come orizzontale.

Una superficie orizzontale, quando non sia di grande estensione, si considera come piana, e si chiama *piano orizzontale*. Un tal nome si dà parimente ad una non trop-

po

po grande porzione di terreno, sulla quale si può camminare per ogni verso senza ascendere o discendere sensibilmente.

85. *Orizzontale* dicesi una retta tirata sopra un piano orizzontale.

86. *Verticale* si appella una retta, che prolungata se abbisogna, incontra un piano orizzontale senza inclinare da veruna parte. La direzione, che prende un corpo, che cade liberamente dall'alto per la sola forza di gravità, è una retta verticale. E' pure una retta verticale la direzione, che prende un filo, il quale essendo sospeso per una delle sue estremità sostiene un peso attaccato all'altra estremità inferiore. Questo filo praticamente si chiama *filo a piombo*, e di esso fanno grande uso i muratori, i falegnami, ed altri artisti.

87. Problema XXII. Esaminare se una retta AB (Fig. 38) sia verticale facendo uso del filo a piombo.

Risoluzione. Da un punto C vicino alla cima della retta AB si cali un filo a piombo CD. Questa retta sarà verticale se in tutta la sua lunghezza il filo a piombo si troverà a lei parallelo.

88. Problema XXIII. Sopra il terreno piantare un bastone in posizione verticale.

Risoluzione. Vicino all'estremità superiore di un retto bastone AB (Fig. 38) s'attacchi il capo di un filo a piombo CD di una lunghezza un poco minore di quella del bastone; si pianti nel terreno l'estremità inferiore del bastone, e si dia al me-

desimo una direzione parallella alla direzione verticale del filo CD.

89. Scolio. Nelle pratiche operazioni, che si fanno per le misure dei campi, non si conducono le rette sopra il terreno, ma solo se ne indicano le posizioni col mezzo di sottili bastoni, ovvero di bacchette piantate verticalmente nel terreno, e fornite alla loro cima di pezzetti di carta, i quali servono a farle distinguere da lontano. Queste bacchette dai Periti si chiamano *paline*, e con un poco di pratica si piantano in posizione verticale anche senza l' ajuto del filo a piombo.

90. Problema XXIV. Sopra un terreno orizzontale piantare verticalmente due paline eguali AB, DC (Fig. 39), piantarne una terza EF, di modo che il punto E sopra il terreno sia in direzione degli altri due A, C.

Risoluzione. La terza palina può piantarsi o tramezzo, o in seguito alle due date. Una persona posta coll' occhio in B traguardi in D, e faccia piantare da un' altra persona la palina EF, per modo che la cartina F sia nella visuale BD, che passa per le altre due cartine B, D: il punto E sarà nella direzione degli altri due A, C.

Allorchè la palina EF debba collocarsi in seguito alle due date paline, potrà bastare una persona sola, la quale porti questa palina verso E, e la pianti ove, traguardando per la sommità delle paline, le tre cartine B, D, F si trovino tutte in una stessa visuale.

91. Corollario. Per indicare sul terreno la direzione di una retta si piantano due paline AB, CD ; e nella stessa direzione si pianta una terza palina EF ; poscia una quarta GH ec.

92. Scolio. L' uso principale delle paline si è di poter facilmente misurare col mezzo loro le rette indicate sul terreno senza deviare sensibilmente nè a destra, nè a sinistra delle medesime rette . Per esempio volendo misurare la retta AG si applicherà l'estremità del trabucco al piede della prima palina AB, e misurando sul terreno si andrà verso la seconda palina CD , in seguito verso la terza palina EF , quindi verso la quarta GH ec.

Dello squadro.

93. Lo *squadro* (Fig.40) è un istromento simile ad un piccolo cilindro di metallo vuoto al di dentro ; e nel cui lungo vi sono quattro fessure ; che si corrispondono ad angolo retto . Il piede sopra il quale si colloca , è un bastone di ordinaria grandezza fornito alla sua estremità inferiore di una punta di metallo, la quale serve a piantarlo facilmente nel terreno . Lo squadro si adopra per condurre sopra il terreno delle rette perpendicolari ad altre rette date sopra lo stesso terreno.

94. Problema XXV. In un punto C di una retta AB data sul terreno alzare alla stessa una perpendicolare (Fig. 41).

Ri-

Risoluzione. Sulla AB di qua, e di là da C ad arbitriarie distanze si piantino due paline A, B; in C si pianti lo squadro in posizione verticale, e si faccia esso girare; finchè traguardando per due fessure opposte, le due paline si trovino nella linea di traguardo; si lasci immobile lo squadro, si traguardi per le altre due fessure, e in qualche punto D della nuova visuale si faccia piantare una palina D; per ultimo tra C e D si segni sul terreno la traccia della retta CD, la quale sarà perpendicolare in C alla AB.

95. Problema XXVI. Sopra il terreno data una retta AB, ed un punto D condurre da questo punto una perpendicolare alla AB (Fig. 41).

Risoluzione. Al lungo della AB verso quella parte, su cui sembra dover cadere la perpendicolare da condursi da D, si porti lo squadro per modo, che la visuale, che si ha traguardando per due fessure, cada continuamente sopra la AB; nel tempo di questo breve trasporto dello squadro si traguardi per le altre due fessure, e quando nella visuale si scorge il punto D come sopra, si pianti nel terreno lo squadro, e dal punto D al punto C, ove si trova piantato il piede dello squadro, si tiri la retta CD, la quale sarà perpendicolare alla AB.

Del quadrante.

96. *Il quadrante*, col quale si misurano gli angoli in campagna è un quarto di circolo di metallo di una sufficiente grandezza fornito di due cannochiali, oppure di due *dioptre*, o *traguardi*, e di un piede sopra il quale può muoversi per' ogni verso (Fig. 42).

Le dioptre sono due regole di metallo piegate ad angolo retto alle loro estremità lungo ciascuna delle quali v' è una sottile fessura, per cui si traguardano gli oggetti. Una di queste dioptre è attaccata a guisa di raggio ad un' estremità del quadrante, e l' altra è mobile intorno al centro del medesimo.

97. Problema XXVII. Con un quadrante fornito di dioptre misurare un angolo MCN sul terreno (Fig. 43. 44).

Risoluzione. Si ponga il centro del quadrante al vertice C del dato angolo; colla dioptra fissa si traguardi in M, e con una vite di pressione si renda immobile il quadrante; si faccia girare l' altra dioptra mobile dirigendola a poter traguardare in N, e si osservi il numero dei gradi dell' arco AD: se l' angolo MCN è acuto (Fig. 43), l' arco AD sarà la sua misura, poichè questo arco è misura dell' angolo ACD, il quale è eguale al suo verticale MCN; e se l' angolo MCN è ottuso (Fig. 44) la sua misura sarà il supplemento dell' arco AD, poichè AD misura l' angolo ACD, il quale è il supplemento dell' angolo MCN.

Della livellazione.

98. Più punti diconsi allo stesso livello, allorchè sono egualmente distanti dal centro della terra. Quindi le linee, e le superficie orizzontali hanno tutti i punti allo stesso livello, e si chiamano *linee* e *superficie* di *livello*. L'operazione, colla quale si cerca la differenza di livello tra più dati punti, si chiama *livellazione*, e i punti, per cui fassi quest' operazione, diconsi *termini* del livello...

99. Gl' istromenti più semplici per livellare sono il *livello a piombo*, ed il *livello d' acqua*.

Il primo livello serve per le più piccole livellazioni, o più propriamente per condurre delle rette, e dei piani paralleli all' orizzonte. L' altro livello si adopra nelle livellazioni maggiori da farsi sopra il terreno.

Del livello a piombino.

100. Il livello a piombino è composto di due righe eguali MC, NC (Fig. 45) unite a qualsivoglia angolo ACB, dal cui vertice C pende un filo, che porta una picciola palla P di metallo; una terza riga AB divisa per metà da una lineetta DP attraversa inferiormente le due MC, NC, lasciandovi al di sotto i due piccoli segmenti eguali AM, BN, i quali servono come di base all' istromento, che nell' uso si deve sempre tenere in posizione verticale.

101. Problema XXVIII. Esaminare se il livello a piombino è esatto.

Risoluzione. Sopra un piano si applichi una riga GH, e sopra questa il livello; se abbisogna, s'inalzi o l'una o l'altra estremità di GH, finchè il filo CD cada sopra la lineetta DP; si rivolti il livello mettendo il piede M in N, ed il piede N in M, e si osservi se l'estremità inferiore del filo cade sopra la lineetta DP; ciò accadendo il livello è esatto; diversamente il livello non è esatto.

102. Problema XXIX. Esaminare se una retta GH sia orizzontale (Fig. 45).

Risol. Sopra la GH si collochi il livello, e si osservi se l'estremità inferiore del filo cade sopra la divisione DP.

103. Problema XXX. Condurre da un punto G una retta orizzontale (Fig. 45).

Risoluzione. Al punto G si applighi l'estremità di una riga GH, e sopra di questa il livello; si tenga immobile il punto G della riga, e si alzi, o si abbassi l'altra estremità della GH, finchè il filo CD cada sopra la lineetta DP.

104. Problema XXXI. Esaminare se un piano sia orizzontale (Fig. 45).

Risoluzione. Sopra questo piano si collochi il livello, e si faccia esso girare intorno al filo CP; se CP in ogni posizione verticale del livello passa per la divisione DP, il piano sarà orizzontale; e se il filo CP non in tutte le posizioni verticali del livello passa per DP, il piano non sarà orizzontale. Il piano

pe-

però si ridurrà orizzontale disponendolo in modo, che il filo CP in qualunque posizione verticale del livello passi per DP.

Del livello d'acqua.

105. Il livello d'acqua è un tubo di metallo lungo un poco più di un braccio, e piegato ad angolo retto verso le sue estremità, nelle quali si fanno entrare, e si attaccano due tubi di vetro aperti d'ambe le parti (Fig. 46). Il tubo AB è collocato sopra una riga, che gli serve di base, e che alla sua metà E resta unita ad un piede. Nell' uso di questo livello si pone il tubo AB prossimamente parallelo all' orizzonte, e i due tubi AC, BD in direzione verticale, e si versa dell' acqua un poco colorita in uno dei tubi di vetro, la quale per la libera comunicazione degli stessi tubi si alza nell' altro tubo fino a mettersi ad uno stesso livello, cioè alla medesima altezza.

106. Problema XXXII. Cercare la differenza di livello tra due punti F, G non molto discosti fra loro (Fig. 47).

In ciascun punto F, G si pianti verticalmente un bastone fornito alla sua sommità di una *biffa*, vale a dire di un pezzo di carta bianca, e di latta inverniciata mobile dall' alto al basso, e su cui sia descritta una linea nera, la quale conservi sempre una direzione orizzontale. Verso la metà della distanza FG, e nella direzione dei due bastoni FM, GN si collochi il livello; dal-

la

la superficie del fluido del tubo AC si traguardi per quella del fluido del tubo BD, e da un ajutante si faccia scorrere la biffa sopra il baſtone GN, finchè la linea nera si trovi nella visuale CD, che paſſa per la superficie del fluido nei due tubi; dalla superficie del fluido del tubo BD si traguardi per quella del fluido del tubo AC, e dall' ajutante si faccia scorrere la biffa sopra il baſtone EM, finchè la linea nera ſia nella visuale CD, ſi misurino le altezze FM, GN, e ſi prenda la differenza loro: sarà queſta l'elevazione del punto F sopra il punto G, cioè la differenza di livello tra i due punti F, G.

107. Problema XXXIII. Cercare la differenza di livello tra due punti A, B molto distanti tra loro con più colpi di livello (Fig. 48).

Risol. Si divida lo spazio AB in più intervalli prossimamente eguali, per esempio se questo spazio è di circa 300. passi, si divida esso nei 3 intervalli AC, CD, DB; si collochi il livello verso la metà del primo intervallo AC; si facciano i traguardi a destra ed a sinistra, e si misurino le altezze AF, CG: si levi il livello dalla prima stazione P, e si collochi verso la metà dell'intervallo CD; si cerchino come prima i due punti di livello H, I, e si misurino le altezze CH, DI: la stessa operazione si faccia alla metà dell'intervallo DB, misurando le altezze DL, BM. In una colonna a sinistra si scrivano tutte le altezze si-

sinistre AF, CH, DL, e in una colonna a destra si scrivano tutte le altezze destre CG, DI, BM; si faccia la somma dei numeri di ciascuna colonna, e si sottragga la somma minore dalla maggiore. La differenza tra queste due somme sarà la differenza di livello tra i due punti A, B. Per esempio siasi trovato quanto segue:

AF di once 30	CG di once 36
CH di once 22	DI di once 16
DL di once 20	BM di once 32
Som. sinistra once 72	Som. destra once 84
	Som. sinist. once 72
	Differenza once 12

Dunque la differenza di livello tra i due punti A, B è di once 12, cioè il punto B è di 12 once più basso del punto A.

PAR-

PARTE SECONDA.

GEOMETRIA PIANA.

CAPO PRIMO.

Delle figure piane, e particolarmente de' triangoli.

108. QUalunque spazio chiuso tutto all' intorno da linee poste sopra di un piano si chiama *figura piana*. Lo stesso spazio considerato in tutta la sua estensione, cioè in lungo, ed in largo si dice *superficie* o *area* della figura, e le linee che rinchiudono la figura prese insieme diconsi *perimetro* o *circuito* della figura.

109. Una figura è o *rettilinea*, o *curvilinea*, o *mistilinea*, secondochè le linee, che la formano sono o tutte rette, o tutte curve, o parte rette e parte curve. Nella Geometria elementare non si considerano, che le figure rettilinee, e tra le curvilinee, e mistilinee quelle soltanto, nelle quali entra il circolo.

Nelle figure rettilinee le linee del perimetro diconsi *lati della figura*, e gli angoli da esse formati *angoli al perimetro*.

110. La figura rettilinea, se ha eguali tutti i lati, dicesi *equilatera*.

Se ha eguali tutti gli angoli *equiangola*.

Se ha eguali tutti i lati, e gli angoli, *regolare*.

Se non ha eguali tutti i lati, e gli angoli, *irregolare*.

111.

111. Due rette non bastano a formare una figura rettilinea chiusa tutto all'intorno, poichè esse non possono incontrarsi, che in un sol punto. Per formare con rette una figura se ne richiedono per lo meno tre, che si uniscano ad angolo.

112. La figura rettilinea prende la sua denominazione dal numero dei suoi lati, il quale è sempre eguale al numero degli angoli al perimetro.

Laonde se ha 3 lati (Fig. 1) si chiama *triangolo*.

Se ha 4 lati (Fig. 2) *quadrilatero*.

Se ha 5 lati (Fig. 3) *pentagono*.

Se ha 6 lati (Fig. 4) *esagono*.

Se ec.

In generale tutte le figure rettilinee, eccettuato il triangolo, diconsi *poligoni*.

Una retta tirata tra i vertici di due angoli di un poligono qualunque, e che passa tutta dentro di esso, si chiama *diagonale*.

113. Il triangolo rispetto ai suoi lati, se li ha tutti eguali, dicesi *equilatero*.

Se ha due lati eguali, *isoscele*.

Se ha tutti i lati diseguali, *scaleno*.

E rispetto ai suoi angoli, se li ha tutti eguali, dicesi *equiangolo*.

Se ha un angolo retto, *rettangolo*.

Se ha un angolo ottuso, *ottusangolo*.

Se ha tutti gli angoli acuti, *acutangolo*.

Nel triangolo rettangolo il lato opposto all'angolo retto dicesi *ipotenusa*, e i due lati, che comprendono l'angolo retto, diconsi *cateti*.

114. In qualunque triangolo ciascun lato preso da se è sempre minore degli altri due presi insieme (num. 9). Quindi per formare con tre rette un triangolo è necessario, che la somma di due qualunque di esse sia maggiore della terza retta.

115. Nel triangolo quel lato AB (Fig. 5) sopra il quale si suppone costruito, si chiama *base* del triangolo.

Il vertice C dell'angolo opposto alla base, *vertice* del triangolo.

La perpendicolare CD calata dal vertice sopra la base, *altezza* del triangolo.

Questa perpendicolare può cadere o dentro il triangolo, o sopra un lato, o fuori del triangolo sopra il prolungamento della base.

Nel triangolo isoscele d'ordinario si prende per base il lato diseguale agli altri due.

116. Teorema I. in ogni triangolo ACB (Fig. 6.) la somma dei tre angoli equivale a due angoli retti, cioè a 180°.

Dimostrazione. Dal vertice C si conduca la retta EF parallela al lato opposto AB. Sarà l'angolo A eguale al suo alterno *m*, l'angolo B eguale al suo alterno *o*; ora la somma dei tre angoli *m*, *n*, *o* equivale a due angoli retti, ossia a 180°. Dunque, sostituendo l'angolo A ad *m*, B ad *o*, la somma dei tre angoli A, *n*, B sarà eguale a due angoli retti, cioè a 180°.

117. Corollario I. Se in un triangolo si conoscono due angoli, si conoscerà anche il terzo levando la somma dei due angoli cogniti da 180°.

118. Corollario II. Un triangolo non può avere più di un angolo retto, altrimenti la somma dei suoi angoli sorpasserebbe 180°, per la stessa ragione non può avere più di un angolo ottuso, nè un angolo retto ed un angolo ottuso insieme, ma può avere tre angoli acuti.

119. Corollario III. Quindi in qualunque triangolo almeno due angoli sono acuti; e nel triangolo rettangolo i due angoli acuti equivalgono insieme ad un angolo retto, e l' uno è complemento dell' altro.

120. Corollario IV. La somma dei tre angoli di un triangolo è eguale alla somma dei tre angoli di un altro triangolo.

121. Corollario V. Se due triangoli hanno due angoli eguali, hanno eguale anche il terzo.

122. E' evidente, che due triangoli sono perfettamente eguali, allorchè tutti i lati, ed angoli di uno sono eguali ai lati, ed angoli dell' altro presi collo stesso ordine; imperciocchè, se questi due triangoli vengono sovtapposti a dovere l'uno all' altro, essi si adattano, e confondono in tutte le loro parti. Se ne' due triangoli ABC, DEH (Fig. 7) sia il lato AB eguale a DH, AC a DE, BC ad EH, l' angolo A all' angolo D, B ad H, C ad E, sovrapponendo il triangolo DEH al triangolo ABC, in modo che DH cada sopra AB, D in A, ed H in B, per l' eguaglianza degli angoli cadrà DE sopra AC, EH sopra BC, ed essendo AC eguale a DE cadrà E in C, e perciò il triangolo

DEH

DEH si confonderà esattamente col triangolo ABC; dunque questi due triangoli saranno perfettamente eguali.

123. A provare la perfetta eguaglianza di due triangoli non è però necessario di sapere, che essi sieno rispettivamente equilateri ed equiangoli, ma basta solo, che in essi si riscontrino eguali certe parti. Nei teoremi seguenti sono indicati alcuni casi, nei quali due triangoli si possono inferire perfettamente eguali.

124. Teorema II. Due triangoli ACB, DEH (Fig. 7) sono perfettamente eguali, allorchè hanno un angolo eguale compreso da lati eguali.

Dimostrazione. Nei due triangoli ACB, DEH sia C eguale ad E, AC eguale DE, CB ad EH. Si sovrapponga il triangolo DEH al triangolo ACB facendo cadere E in C, ED sopra AC, cadrà EH sopra CB, D in A, H in B, DH sopra AB, ed il triangolo DEH si confonderà in tutte le sue parti col triangolo ACB; dunque i due triangoli ACB, DEH sono perfettamente eguali.

125. Teorema III. Due triangoli ACB, DEH (Fig. 7) sono perfettamente eguali, allorchè hanno un lato eguale compreso da angoli eguali.

Dimostrazione. Sia A eguale a D, B ad H, AB a DH. Si sovrapponga il triangolo DEH al triangolo ACB, facendo cadere DH sopra AB, l'angolo D sopra il suo eguale A, e l'angolo H sopra il suo egua-

le B; cadrà DE sopra AC, EH sopra BC il vertice E sopra il vertice C, ed il triangolo DEH si confonderà esattamente col triangolo ACB; dunque questi due triangoli sono perfettamente eguali.

126. Teorema IV. Due triangoli ACB, DEH (Fig. 7) sono perfettamente eguali, allorchè sono rispettivamente equilateri tra loro, cioè quando hanno i tre lati eguali ciascuno a ciascuno.

Dimostrazione. Nei due triangoli ACB, DEH sia AC eguale a DE; BC ad EH, AB a DH. Col centro A e raggio AC si descriva l'arco di circolo *mm*, e col centro in B e raggio BC si descriva l'arco *nn*. Si soprapponga il triangolo DEH al triangolo ACB, mettendo DH sopra AB, D in A, H in B. Per essere DE eguale ad AC cadrà E in qualche punto dell'arco *mm*; e per essere HE eguale a BC cadrà E in qualche punto dell'arco *nn*, dunque E cadrà nell'intersecazione C dei due archi *mm*, *nn*, e perciò il lato DE cadrà sopra il lato AC, EH sopra B, C ed il triangolo DEH si confonderà in tutte le sue parti col triangolo ACB.

127. Teorema V. Nel triangolo isoscele gli angoli sopra la base sono eguali, e viceversa se un triangolo ha due angoli eguali, i lati opposti a questi due angoli sono eguali, cioè il triangolo è isoscele.

Dimostrazione della prima parte. Si divida la base AB (Fig. 8) in due parti egua-

guali AD, DB, e dal vertice C si conduca CD. I due triangoli ACD, BCD hanno tutti i lati eguali ciascuno a ciascuno, dunque sono in tutto eguali: dunque i due angoli sulla base A, B sono eguali.

Dimostrazione della seconda parte. Si divida l'angolo C in due parti eguali x, y. I due triangoli ACD, BCD hanno due angoli eguali, e perciò hanno eguale anche il terzo angolo in D; dunque essi triangoli hanno il lato comune CD compreso da angoli eguali; dunque sono perfettamente eguali; ed hanno eguali i due lati AC, BC.

128. Corollario I. Il triangolo equilatero ha tutti gli angoli eguali, poichè esso è isoscele sopra ciascun lato. Per l'istessa ragione il triangolo equiangolo ha tutti i lati eguali, cioè è equilatero.

129. Corollario II. Se in un triangolo isoscele si conosce uno degli angoli alla base, si conoscono anche gli altri due, poichè gli angoli alla base sono eguali tra loro, e l'angolo al vertice si ottiene levando la somma dei due angoli alla base da 180°.

130. Corollario III. Se in un triangolo isoscele si conosce l'angolo al vertice levando quest' angolo da 180°, e dividendo il residuo per due, si avrà ciascun angolo alla base.

131. Corollario IV. Nel triangolo equilatero ciascun angolo è la terza parte di 180°, cioè 60°.

132. Corollario V. Se in un triangolo iso-

iscscele l'angoio al vertice è retto, ciascun angolo sopra la base è semiretto, cioè di 45°.

133. Corollario VI. Due triangoli isosceli sono equiangoli tra loro, allorchè hanno eguale o l'angolo al vertice, o un angolo alla base.

134. Teorema VI. Se da un punto qualunque D della periferia del circolo (Fig.9) sono condotte due corde DA, DB alle estremità di un diametro qualunque AB, l'angolo ACB, il cui vertice è nella periferia, è retto.

Dimostrazione. Si tiri il raggio CD. La somma degli angoli A, *m*, *n*, B è eguale alla somma dei tre angoli A, DB del triangolo ADB, cioè a due angoli retti. Dall'eguaglianza dei raggi CA, CD, CB si ha che l'angolo *m* è eguale ad A, ed *n* a B; e perciò l'angolo ADB è eguale alla somma dei due A, B: dunque ADB è eguale alla semisomma dei tre angoli del triangolo, cioè ad un angolo retto.

135. Problema I. Inalzare all'estremità D di una data retta AD (Fig.9) una perpendicolare senza prolungare questa retta, e senza far uso della squadra.

Risoluzione. Scelto ad arbitrio un punto C fuori della AD si tiri CD, e col centro C, e raggio CD si descriva un circolo ADB che seghi AD in qualche punto A; da A si meni il diametro AB, e si tiri BD, che sarà la richiesta perpendicolare.

136. Problema II. Sopra una data retta

AE

AB (Fig. 10) costruire un triangolo equilatero.

Risoluzione. Coi centri in A ed in B, e con un raggio eguale ad AB si descrivano due archetti, che si seghino in qualche punto C, e si tirino le rette CA, CB, le quali formeranno colla AB il triangolo equilatero ACB, essendo tutti i lati eguali, perchè raggi di circoli eguali.

137. Problema III. Con tre rette date AB, DE, FG (Fig. 11), ciascuna delle quali è minore della somma delle altre due, costruire un triangolo.

Risoluzione. Centro A, e raggio AC eguale a DE si descriva un arco *mm*, centro B, e raggio BC eguale ad FG si descriva un altro arco *nn*, che seghi il primo in qualche punto C; si tirino le rette AC, BC, e si avrà il triangolo ACB.

138. Prob. IV. Date due rette ed un angolo costruire un triangolo, in cui l' angolo dato sia compreso dalle due rette date (Fig. 11).

Risoluzione. Si faccia l' angolo A eguale al dato, si prenda AB eguale ad una delle due rette date, AC eguale all' altra, e si tiri BC; sarà ACB il triangolo cercato.

139. Problema V. Dati due angoli, la cui somma sia minore di due angoli retti, ed un lato costruire un triangolo, in cui il lato dato sia compreso dai due angoli dati (Fig. 11.).

Risoluzione. All' estremità A del lato AB si faccia l' angolo A eguale ad uno dei da-

ri angoli, ed all' estremità B si faccia l'angolo B eguale all'altro angolo dato. Le due rette AC, BC si uniranno in qualche punto C, e formeranno il triangolo richiesto ACB.

140. Problema VI. Costruire un triangolo rettangolo, di cui son dati i due cateti.

Risoluzione. All'estremità B del cateto AB (Fig. 12.) s'inalzi perpendicolarmente l'altro cateto BC, e si tiri AC, sarà ACB il triangolo rettangolo che si cerca.

141. Problema VII. Costruire un triangolo rettangolo, di cui è data l'ipotenusa, ed un cateto.

Risoluzione. All' estremità B del dato cateto AB (Fig. 12) s'inalzi una perpendicolare indefinita BD; col centro A, e con un raggio eguale all'ipotenusa data AC si faccia nella BD l'intersecazione C, e si tiri AC; sarà ACB il triangolo cercato.

142. Problema VIII. Circoscrivere un circolo ad un dato triangolo ACB, cioè descrivere la circonferenza di un circolo, la quale passi per i tre vertici di un dato triangolo (. Fig. 13).

Risoluzione. I tre vertici del triangolo si considerino come tre punti disposti in diversa direzione, e per essi si faccia passare la circonferenza di un circolo; cioè con perpendicolari si dividano per metà due lati qualunque del triangolo, per esempio AC, CB; dal punto d'incontro D delle due perpendicolari DE, DF si tiri al vertice C la retta DC, e centro D col raggio CD si descriva un circolo ACB, il quale passerà

serà pei tre vertici del triangolo.

143. Problema IX. Misurare la distanza AB non accessibile, che alle sue estremità (Fig. 14).

Risoluzione. Dalle estremità A, B si tirino ad uno stesso punto C due rette AC, BC; si prolunghi AC verso D prendendo CD eguale ad AC; si prolunghi BC verso E prendendo CE eguale a BC; si tiri e si misuri DE. Questa retta sarà eguale alla distanza AB; poichè i due triangoli ACB, DCE, avendo due lati coll' angolo compreso eguali, sono perfettamente eguali.

144. Problema X. Misurare la distanza AB accessibile soltanto ad una estremità B (Fig. 15).

Risoluzione. In B alla visuale AB s' innalzi collo squadro la perpendicolare BC; si prenda BC ad arbitrio, e CD eguale a BC; in D s' innalzi DE perpendicolare a DC, e si prolunghi la visuale AC ad incontrare in E la DE; sarà DE eguale ad AB; onde misurando DE si avrà la misura di AB.

CAPO II.

Dei Poligoni.

145. Dopo i triangoli vengono i poligoni, cioè le figure rettilinee, che hanno più di tre lati.

Il quadrilatero non avendo che 4 lati è il più semplice tra i poligoni.

Il quadrilatero si distingue in *quadrilatero ſemplice*, in *trapezio*, ed in *parallelogrammo*. Il quadrilatero semplice è quello, i cui lati non sono nè eguali, nè paralleli.

Il trapezio è un quadrilatero, in cui due lati opposti sono paralleli.

Il parallelogrammo è un quadrilatero, in cui i lati opposti sono paralleli.

Il parallelogrammo poi in ispecie si chiama *rettangolo* se ha gli angoli retti: *quadrato* se ha tutti i lati eguali tra loro, e gli angoli retti; *romho* se ha tutti i lati eguali, e gli angoli obliqui, *romboide*, o parallelogrammo *obliquangolo*, se ha gli angoli obliqui.

146. Si chiama *base* del parallelogrammo quel lato AB (Fig. 16.), sul quale esso parallelogrammo si suppone inalzato, ed *altezza* una perpendicolare DE calata sopra la base da un punto qualunque D del lato opposto.

Nel parallelogrammo rettangolo la perpendicolare calata da D (Fig. 17) si confonde ed è eguale al lato DA. Dunque questo lato si può prendere per l' altezza del parallelogrammo; ma nell' obliquangolo (Fig. 17.) altezza DE è sempre minore del lato AD.

147. Teorema VII. In qualunque parallelogrammo i lati, e gli angoli opposti sono eguali.

Dimostrazione. Si tiri la diagonale BD (Fig. 18). I due triangoli ABD, BCD hanno eguali i due angoli alterni *m*, *n*, i due

due *o*, *p*, ed il lato BD comune; dunque essi sono perfettamente eguali, e perciò sono eguali i due lati opposti AB, CD, i due AD, BC, due angoli opposti A, C, e la somma dei due angoli *m*, *o* è eguale alla somma dei due *n*, *b*, cioè sono eguali i due angoli opposti B, D.

148. Corollario I. La diagonale divide un parallelogrammo qualunque in due triangoli perfettamente eguali.

149. Corollario II. Quindi un triangolo si può considerare la metà di un parallelogrammo di egual base di eguale altezza.

150. Teorema VIII. Se un quadrilatero ABCD (Fig. 18) ha o tutti i lati opposti eguali, o due lati opposti eguali e paralleli, è parallelogrammo.

Dimostrazione. Si conduca la diagonale BD.

Per la prima parte del teorema i due triangoli ABD, BCD sono rispettivamente equilateri, dunque sono equiangoli, cioè sono eguali gli angoli alterni *m*, *n*, e gli alterni *o*, *p*, dunque i lati opposti sono paralleli, ed il quadrilatero è parallelogrammo.

Per la 2. parte supponendo eguali, e paralleli i due lati AB, DC, i medesimi triangoli sono in tutto eguali, poichè si ha AB eguale a DC, DB comune, e l'angolo *m* eguale ad *n*: dunque sarà AD eguale a BC, e l'angolo *o* eguale a *p*, dunque saranno parallele le due rette AD, BC, ed il quadrilatero ABCD sarà un parallelogrammo.

151. Problema XI. Sopra una data retta AB costruire un quadrato (Fig. 19).

Risoluzione. Alle estremità A B di AB s' inalzino due perpendicolari AD, BC eguali ciascuna ad AB, e si tiri DC, sarà ABCD il quadrato di AB; poichè i due lati paralleli AD, BC sono eguali tra loro, ed al lato AB, e gli angoli A, B sono retti, perciò retti gli altri due C, D.

152. Problema XII. Date due rette AB, AD costruire con esse un parallelogrammo rettangolo (Fig. 17).

Risoluzione. Alle estremità A, B della retta AB s' inalzano due perpendicolari eguali ciascuna all' altra retta AD, e si conduca DC; sarà ABCD il rettangolo delle due rette AB, AD, perchè i due lati paralleli AD, BC sono eguali tra loro, e gli angoli A, B sono retti, e perciò retti gli altri due C, D.

153. Problema XIII. Date due rette, ed un angolo costruire un parallelogrammo obliquangolo (Fig. 18).

Risoluzione. Si faccia l' angolo BAD eguale al dato, si prenda AB eguale ad una delle date rette, ed AD eguale all' altra retta data; da B menisi BC parallela ed eguale ad AD, e tra i punti C, D si tiri la retta DC. Sarà ABCD il parallelogrammo cercato.

154. Ogni figura rettilinea si può dividere in tanti triangoli col mezzo di rette variamente condotte dentro di essa (Fig. 20.).

Se la figura è regolare, dentro di essa si

trova un punto C chiamato *centro* della figura, il quale equidista da tutti i vertici degli angoli al perimetro (Fig. 21). Imperocchè se con rette si divideranno per metà tutti gli angoli eguali al perimetro, ne nasceranno più triangoli isosceli ed eguali, nei quali saranno eguali tutti i lati CA, CB, CD, CE, ec. Quindi se da questo centro verranno guidate delle rette a tutti i vertici degli angoli al perimetro, queste rette saranno tutte eguali tra loro, divideranno per metà tutti quegli angoli, e divideranno il poligono in tanti triangoli isosceli ed eguali, quanti sono i lati di esso poligono.

155. Nel poligono regolare una retta CH tirata dal centro perpendicolarmente ad un lato si chiama *apotema* del poligono.

Nello stesso poligono, le rette tirate dal centro ai vertici degli angoli formano intorno allo stesso centro tanti angoli tra loro uguali quanti sono i lati del poligono, e ciascuno di questi angoli, che dicesi *angolo al centro*, è eguale al quoziente, che risulta dal dividere 360° pel medesimo numero dei lati.

Quindi l'angolo al centro nel triangolo equilatero è di 120°.

Nel quadrato di 90°.

Nel pentagono di 72°.

Nell'esagono di 60°.

ec.

156. Nell'esagono siccome l'angolo al centro è di 60°, ciascun angolo alla base

dei triangoli è pure di 60°. Dunque l'esagono regolare col mezzo delle rette condotte dal centro ai vertici degli angoli al perimetro si divide in 6 triangoli equilateri. In oltre per essere AC raggio del circolo, ed AB corda di 60°, si inferisce che in uno stesso circolo il raggio, e la corda di 60° sono due rette eguali. Dunque se il raggio si trasporterà intorno alla periferia del circolo, questa resterà divisa in 6 parti eguali.

157. Problema XIV. Cercare il centro di un poligono regolare (Fig. 21).

Risoluzione. Con due rette si dividano per metà due angoli del poligono. Il punto d'incontro di queste due rette sarà il centro del poligono.

158. Corollario. Trovato il centro del poligono regolare, è facile circoscrivere al medesimo un circolo; perchè il centro di questo circolo è quello stesso del poligono, ed il raggio è eguale a ciascuna delle rette guidate dal centro ai vertici degli angoli al perimetro.

159. Problema XV. In un dato circolo iscrivere un poligono regolare di un dato numero di lati (Fig. 22).

Risoluzione. Si abbia ad iscrivere un ottagono regolare, cioè un poligono regolare di 8 lati. Si divida 360 per 8; il quoto 45 sarà il numero dei gradi di ciascun angolo al centro del poligono; si tiri il raggio CA, al centro C col semicircolo graduato si faccia l'angolo ACB di 45; si tiri la corda AB;

AB; col compasso si porti AB in giro per tutta la periferia del circolo, segnandovi i punti d' intersecazione A, B, D, E ec. e tra questi punti si tirino le corde AB, BD, DE ec., la figura iscritta sarà un ottagono regolare.

160. Corollatio I. In un dato circolo, iscritto che sia un poligono regolare qualunque, è facile iscrivere un altro poligono regolare di doppio numero di lati. Si divida l' arco AB in due parti eguali Am, mB, si tiri la corda Am; si porti questa in giro sopra l' intera periferia del circolo, e sarà iscritto nel circolo un poligono regolare di doppio n°. di lati. Così dato un quadrato s' iscriverà un ottagono; dato un ottagono s' iscriverà un poligono di 16 lati ec.

161. Corollario II. Se il poligono regolare iscritto è di un n°. pari di lati, con rette congiungendo alternativamente un sì, e un no i punti di divisione della periferia, si iscriverà nel circolo un poligono, il di cui n°. dei lati sarà la metà del numero de' lati del già iscritto.

162. Problema XVI. In un dato circolo iscrivere un qualunque poligono regolare senza far uso del semicircolo graduato. (Fig. 23).

Metodo di approssimazione. Vogliasi iscrivere un *eptagono*, cioè un poligono regolare di sette lati. Si divida il diametro AB del dato circolo in sette parti eguali; sopra AB si descriva un triangolo equilatero ADB; dal vertice D di questo triangolo

lo passando pel secondo punto di divisione del diametro si guidi la retta DE, che incontri il circolo in qualche punto E, e si tiri la corda AE: sarà questa prossimamente eguale al lato dell' eptagono da iscriversi nel dato circolo: dunque si porti AE in giro sulla periferia del circolo, e si avrà l' eptagono cercato.

163. Problema XVII. Sopra una data retta descrivere un poligono regolare di un dato numero di lati (Fig. 22).

Risoluzione. Si debba costruire un ottagono, cioè un poligono regolare di 8 lati. Si divida 360. per 8; il quoto 45 si levi da 180, e del residuo 135 si prenda la metà $67\frac{1}{2}$. Alle due estremità della data retta AB facciansi i due angoli CAB, CBA ciascuno di gradi $67\frac{1}{2}$; col centro nell' intersecazione C delle due rette CA, CB, e col raggio CA si descriva un circolo; sopra la periferia di questo circolo si porti in giro la AB, e si avrà l' ottagono regolare cercato.

CAPO III.

Delle rette proporzionali, e delle figure simili.

164. *Ragione geometrica, o rapporto geometrico* dicesi il confronto di due quantità o grandezze, allorchè si cerca quante volte l' una di esse contiene o è contenuta dall' altra.

Le

Le due quantità in tal modo paragonate diconsi *termini* della ragione: la prima quantità si chiama *antecedente*; la seconda *conseguente*, ed il numero delle volte che la prima contiene la seconda, *esponente* della ragione. Così nella ragione dei due numeri 6, 3, l' antecedente è 6, il conseguente è 3, l' esponente è 2. Questa ragione si scrive così 6 : 3, e si pronuncia 6 sta a 3.

165. Intorno alle ragioni geometriche sono da notarsi i seguenti principj. 1. Che le quantità da paragonarsi tra loro devono essere della medesima specie; imperciocchè le quantità di diversa specie non possono avere tra loro alcuna relazione.

2. Le ragioni, che hanno esponenti eguali, sono eguali.

3. Se due ragioni sono eguali ad una terza ragione, sono eguali tra loro.

4. Non si cambia una ragione geometrica col moltiplicare, o col dividere ciascun termine per una stessa quantità; poichè nella ragione dei due prodotti, o dei due quoti si ha sempre l' esponente della prima ragione.

166. Se quattro quantità sono tali, e talmente disposte tra loro, che la ragione delle due prime sia eguale alla ragione delle due ultime, esse diconsi formare una *proporzione geometrica*, ovvero essere *geometricamente proporzionali tra loro*; per esempio i quattro numeri 6, 3, 4, 2 sono geometricamente proporzionali, perchè la ragione di 6 : 3 è eguale alla ragione di 4 : 2. Questa proporzione si scrive così 6 : 3 :: 4 : 2.

La

La prima, e quarta quantità di una proporzione diconsi *termini eſtremi*; la seconda e terza quantità *termini medj*.

167. Se i due termini medj di una proporzione sono eguali tra loro, cioè sono una stessa quantità replicata, la proporzione si chiama *continua*, le quantità diconsi *continuamente proporzionali*, e la quantità replicata dicesi *media proporzionale*. Così i tre numeri 8, 4, 2 sono in continua proporzione, perchè 8 : 4 :: 4 : 2, e 4 è il termine medio proporzionale.

168. Due quantità si dicono in *ragione diretta* di due altre, allorchè quante volte la prima contiene, o è contenuta nella seconda, altrettante la terza contiene, o è contenuta nella quarta. Così i due numeri 6, 3 sono in ragione diretta dei due 4, 2, onde formasi la proporzione diretta 6 : 3 :: 4 : 2.

169. Due quantità si dicono in *ragione inverſa*, o *reciproca* di due altre, allorchè quante volte la prima contiene, o è contenuta nella seconda, altrettante la quarta contiene, o è contenuta nella terza. Così i due numeri 6, 3 sono in ragione inversa o reciproca degli altri 2, 4; e per formarne una proporzione diretta, o convien mettere il secondo in luogo del primo, dicendo 3 : 6 :: 2 : 4, o il quarto in luogo del terzo, dicendo 6 : 3 :: 4 : 2.

170. Teorema IX. In ogni proporzione geometrica diretta il prodotto dei termini medj è eguale al prodotto dei termini eſtremi.

Di-

Dimostrazione. Si prenda una qualunque proporzione geometrica diretta per esempio 6 : 3 : : 4 : 2. Moltiplicando i due mezj si ha il prodotto 12. Moltiplicando i due estremi si ha lo stesso prodotto 12. Dunque ec.

171. Corollario I. Quindi nella proporzione continua il prodotto degli estremi è eguale al quadrato del termine medio, vale a dire, al prodotto del termine medio moltiplicato in se stesso. Infatti nella proporzione continua 8 : 4 : : 4 : 2, il prodotto di 8 per 2 è eguale al prodotto di 4 per 4, cioè al quadrato di 4.

172. Corollario II. Ha luogo ancora la proporzione inversa, cioè se 4 quantità sieno tali, e talmente disposte, che il prodotto delle due estreme sia eguale al prodotto delle due medie, esse saranno in geometrica proporzione; e se tre quantità sieno tali, che il prodotto delle due estreme sia eguale al quadrato dalla media, esse saranno in continua proporzione.

173. Teorema X. Se nel lato AC di un angolo qualunque ACB (Fig. 24) si prenda un numero qualunque di parti eguali CD, DE, EF, e dai punti di divisione si tirino sotto qualunque angolo colle AC delle rette tra loro parallele DH, EI, FL, che incontrino l'altro lato CB, le parti CH, HI, IL, di questo lato saranno eguali tra loro, ed in numero eguale alle parti prese sul lato AC.

Dimostrazione. Dai punti di divisione D, E, F si tirino alla CB le parallele DP, EQ.

I triangoli CDH, DEP, EFQ hanno i lati eguali CD, DE, EF compresi da angoli eguali: dunque essi triangoli sono perfettamente eguali, ed hanno tra loro eguali i lati corrispondenti CH, DP, EQ. Inoltre sono tra loro eguali DP con HI, ed EQ con IL, perchè lati opposti nei parallelogrammi DHIP, EILQ (147). Dunque sono tra loro eguali i segmenti CH, HI, IL del lato CB, ed il loro numero è eguale al numero dei segmenti del lato CA.

174. Teorema XI. Se con una retta DL (Fig. 25) parallela ad uno dei lati AB di un triangolo qualunque ACB si seghino gli altri due lati AC, CB, saranno questi divisi in parti proporzionali.

Dimostrazione. Suppongasi, che il lato AC sia diviso in un grandissimo numero di parti tra loro eguali, e che da tutti i punti di divisione siano condotte delle rette parallele al lato AB. Pel teorema precedente i lati AC, CB saranno divisi da queste parallele nello stesso numero di parti eguali. Inoltre è evidente, che una tra queste parallele o cadrà, o potrà supporsi cadere sopra DE. Dunque saranno divisi in uno stesso numero di parti eguali i due segmenti CD, CE, come pure gli altri due AD, BE. Dunque se si valutino i due lati AC, CB, e i loro rispettivi segmenti dai numeri delle parti, nelle quali si suppongono divisi, si avranno le tre seguenti proporzioni.

CD : DA :: CE : EB;
AC : CD :: CB : CE;
AC : AD :: CB : BE.

In fatti, se noi supporremo, che il lato AC sia diviso in 10000 parti, e che di queste 6000 siano contenute dal segmento CD, e 4000 dal segmento AD, il lato CB sarà diviso in 10000 parti eguali, 6000 delle quali apparterranno al segmento CE, e 4000 al seguente BE. Ora egli è assai chiaro, che le 6000 parti del segmento CD stanno alle 4000 del segmento DA, come le 6000 di CE alle 4000 di EB; dunque CD : DA :: CE : EB. Lo stesso si dica delle altre due proporzioni.

175. Corollario I. Ha luogo ancora la proporzione inversa, cioè se DE taglia i lati AC, BC in parti proporzionali, sarà DE parallela alla AB, poichè essa DE si confonderà colla parallela condotta da D alla AB, la quale taglia i lati AC, BC in parti proporzionali.

176. Corollario II. Se dalle estremità della DE si tirino le rette DF, EG parallele ai lati BC, AC sarà 1. AC : DC :: AB : BF, cioè, per essere BF eguale a DE,

AC : DC :: AB : DE,

2 BC : EC :: AB : AG,

cioè, per essere AG eguale a DE,

BC : EC :: AB : DE.

Dunque ciascuno dei due lati AC, BC sta al suo segmento vicino al vertice C come la base AB sta alla parallela DE.

177. Corollario III. Se si seghi un triangolo qualunque ACB parallelamente ad uno dei suoi lati AB con quante si voglian rette DE, FG, HI, (Fig. 26) gli altri due la-

lati AC, BC saranno tagliati in parti proporzionali, poichè supponendo AC divisa in un grandissimo numero di parti eguali, e condotte da tutti i punti di divisione delle parallele alla AB, si dimostrerà come si è fatto nel teorema, che due segmenti qualunque corrispondenti dei due lati AC, CB saranno divisi in uno stesso numero di parti eguali.

178. Problema XVIII. Dividere una data retta AB in un dato numero di parti tra loro eguali.

1. Soluzione. Sotto qualunque angolo BAC (Fig. 27) ci unisca alla AB una retta indefinita AC; sopra AC con un'apertura di compasso ad arbitrio si prendano di seguito da A verso C tanti segmenti eguali AD, DE, EF, ec. quante sono le parti eguali, in cui deesi dividere la AB. Colla retta BH si unisca l'ultimo punto di divisione H coll'estremità B della AB, e dagli altri punti di divisione della AH si tirino delle parallele alla BH; queste divideranno la AB nel cercato numero di parti eguali.

1. Soluzione. Sotto qualunque angolo BAX si unisca all'estremità A della AB (Fig. 28) una resta indefinita AX, e dall'altra estremità B si tiri BZ parallela alla AX. Sopra AX andando da A verso X con un'apertura qualunque di compasso si prendano tanti segmenti eguali quante sono le parti, in cui deesi dividere la AB; da B andando verso Z si faccia lo stesso, cioè si prendano dei seg-

segmenti in numero, e grandezza eguali ai segmenti presi sopra AX, e dai punti di divisione si tirino le rette AN, CM, DL ec., le quali per essere comprese da rette eguali e parallele, saranno eguali e parallele tra loro, e divideranno la AB in tante parti eguali, come è stato proposto.

3. Soluzione sopra il terreno. Con una misura cognita, come sarebbe il trabucco, si misuri la data retta AB (Fig. 29), e si divida la lunghezza trovata di AB pel numero dato, il quoto sarà la lunghezza di una delle parti cercate. Col mezzo dello stesso trabucco si prendano sopra la AB, andando da una estremità all'altra, i segmenti AC, CD, DE, EB tutti eguali a questo quoto; ciò fatto la retta AB sarà divisa nel numero richiesto di parti eguali.

179. Problema XIX. Divisa una retta AC (Fig. 26) in parti qualunque dividere un'altra retta BC in parti proporzionali alle parti della AC.

Risoluzione. Uniscansi le due rette AC, BC a qualunque angolo C; si tiri AB, e dai punti di divisione della AC si tirino delle rette parallele alla AB; queste rette divideranno la BC nelle parti cercate.

180. Corollario. Se la retta BC sia a dividersi in parti, le quali conservino tra loro una ragione data per numeri, per esempio 1. 2. 3. 4., sopra una retta indefinita AC si prenda un segmento qualunque CD; in seguito di questo si prenda DF doppio di CD, FH triplo di CD, ed HA qua-

dru-

duplo di CD, cioè prendasi di seguito dei segmenti proporzionali ai dati numeri, e colla soluzione precedente si divida BC in parti proporzionali ai segmenti presi sopra AC.

181. Due figure rettilinee di un egual numero di lati, vale a dire, due triangoli, due quatrilateri, due pentagoni ec. diconsi *equilatere tra se*, se tutti i lati di una sono per ordine eguali ai lati dell' altra; *equiangole tra se*, se tutti gli angoli di una sono per ordine eguali agl'angoli dell' altra; *equilatere ed equiangole tra se*, se tutti i lati ed angoli di una sono per ordine eguali ai lati ed angoli dell' altra; *simili*, se tutti gli angoli di una sono per ordine eguali agli angoli dell'altra, e i lati intorno a questi angoli eguali nelle due figure sono proporzionali. Nelle figure simili chiamansi *corrispondenti* o *omologi* gli angoli eguali, e i lati proporzionali, che in esse si corrispondono.

182. Quindi 1. le figure equilatere ed equiangole tra se sono perfettamente eguali, perchè sovrapposte a dovere, si adattano e confondono in tutte le loro parti.

2. Le figure regolari della medesima specie, cioè di un egual numero di lati sono simili, perchè sono equiangole tra se, ed hanno tutti i lati proporzionali.

3. Se due figure simili hanno due lati corrispondenti eguali, sono in tutto eguali, perchè in esse tutti i lati corrispondenti sono in ragion d' eguaglianza.

183.

183. Teorema XII. Due triangoli sono simili, allorchè sono equiangoli.

Dimostrazione. Nei due triangoli ACB, DEF (Fig.30) sia l'angolo A eguale all'angolo D, B eguale B, C eguale F. Si sovrapponga il triangolo DFE al triangolo ACB mettendo l'angolo F sopra il suo eguale C, il lato DF sopra il lato CA, ed FE sopra CB, e sia GCH eguale al triangolo DFE. Essendo per ordine eguali gli angoli A, D, x, sarà GH parallela ad AB, onde (num. 174) CA : CG : CB : CH :: AB : GH; e sostituendo i lati del triangolo DFE ai corrispondenti del triangolo GCH, sarà CA : FD :: CB : FE :: AB : DE. Dunque i due triangoli ACB, DFE equiangoli tra se hanno i lati proporzionali, dunque sono simili.

184. Corollario I. Nei triangoli simili agli angoli eguali sono opposti i lati proporzionali, cioè agli angoli A, D i lati CB, FE ec.

185. Corollario II. Nei due triangoli simili ACB, DFE prendendo per basi i due lati AB, DE, le altezze CM, FN saranno proporzionali a queste basi: poichè, essendo equiangoli i triangoli rettangoli MCB, NFE, sarà CM : FN :: BC : EF; ma BC : EF : : AB : DE. Dunque CM : FN :: AB : DE.

186. Teorema XIII. Due triangoli sono simili, allorchè hanno i lati proporzionali.

Dimostrazione. Nei due triangoli ACB, DFE (Fig.30) sia AC : DF : : AB : DE : BC :

BC : EF. Si prenda CG eguale a DF, e si tiri GH parallela ad AB. Per ipotesi il triangolo ACB ha i suoi lati proporzionali ai lati del triangolo DFE. Per costruzione lo stesso triangolo ACB ha i suoi lati proporzionali ai lati del triangolo a lui equiangolo GCH. Dunque i lati del triangolo DFE, sono proporzionali ai lati del triangolo GCH, e per essere ancora eguali in questi due triangoli i due lati corrispondenti DF, GC, tutti i lati del triangolo DFE sono per ordine eguali ai lati del triangolo GCH; cioè questi due triangoli sono tra se equilateri, ed equiangoli. Dunque sono per ordine equiangoli e simili i tre triangoli ACB, GCH, DFE, cioè sono simili i due ACB, DFE.

187. Teorema XIV. Due triangoli sono simili, allorchè hanno un angolo eguale, e i due lati che lo comprendono proporzionali.

Dimostrazione. Nei due triangoli ACB, DFE (Fig. 30) sia l'angolo C eguale all' angolo F, e CA : CB : : FD : FE. Si sovrapponga il triangolo DFE al triangolo ACB, facendo cadere l' angolo F sopra il suo eguale C, il lato DF sopra CA, ed EF sopra CB, sicchè il triangolo DFE diventi il triangolo GCH. Per essere CA : CB : : FD : FE, sarà CA : CB :: CG : CH : dunque sarà GH parallela ad AB (num. 175), ed il triangolo ACB sarà simile al triangolo GCH : dunque il triangolo ACB sarà simile al triangolo DFE.

188. Problema XX. Sopra una data retta AB costruire un triangolo simile ad un altro dato DFE (Fig. 30).

Risoluzione. Sopra la retta AB alla sua estremità A si faccia l' angolo A eguale all' angolo D, ed alla estremità B l' angolo B eguale all' angolo E. Le due rette AC, BC si uniranno in qualche punto C, e formeranno il triangolo ACB, che sarà equiangolo, e perciò simile al dato DFE.

189. Teorema XV. Se dal vertice C (Fig. 31) di un triangolo rettangolo ACB si abbassi una perpendicolare CD sopra l' ipotenusa AB, sarà CD media proporzionale tra i due segmenti di questa AD, DB.

Dimostrazione. Nei due triangoli rettangoli ACD, ACB, per essere comune l'angolo A, l' angolo x è eguale all' angolo B. Nei due triangoli rettangoli BCD, ACB, per essere comune l' angolo B, l' angolo y è eguale all' angolo A. Dunque i due triangoli rettangoli ACD, BCD sono simili, poichè hanno l' angolo x eguale all' angolo B, e l' angolo A eguale all'angolo y; laonde paragonando i lati opposti a questi angoli eguali si trova AD : CD : : CD : BD.

190. Corollario. Se da un punto qualunque C (Fig. 32) della periferia di un circolo si cali una perpendicolare CD ad un diametro qualunque AB, sarà CD media proporzionale tra i segmenti AD, BD di questo diametro. Poichè se si tirino le corde AC, BC, il triangolo ACB sarà rettangolo in C (num. 134), e CD sarà la per-

dicolare calata dal vertice dell' angolo retto sopra l' ipotenusa AB.

191. Problema XXI. Cercare una quarta proporzionale a tre rette date A, B, C. (Fig. 33).

1. Soluzione. Si uniscano a qualunque angolo due rette indefinite PQ, PR; sopra PQ andando da P verso Q si prenda il segmento PL eguale alla prima retta A, e in seguito il segmento LM eguale alla seconda B, e sopra la PR si prenda PN eguale alla terza C; si tiri LN, e da M la MO parallela ad LN. Sarà NO la quarta retta cercata; poichè per la costruzione sarà PL: LM:: PN: NO (num. 174).

2. Soluzione. Se le rette date sono assai grandi si operi in questo modo. Con una unità di misura, per esempio il braccio, si misurino le tre rette date, e si trovi A di braccia 10, B di braccia 15, e C di braccia 12. Colla regola di proporzione si faccia 10 : 15 :: 12 : al quarto termine; questo sarà eguale al prodotto di 15 per 12 diviso per 10, cioè a 18: dunque la quarta retta cercata sarà di 18. braccia.

192. Problema XXII. Cercare una terza continuamente proporzionale a due rette date A, B (Fig. 33).

Questo problema si scioglie come il precedente; solo si avverta di fare la terza retta C eguale alla seconda B. Nel risultato in luogo della quarta si avrà la terza retta cercata.

193. Problema XXIII. Cercare una media

dia proporzionale a due rette date AD, BD (Fig. 32).

Risoluzione. 1. Soluzione. Si uniscano le due rette date in una sola AB, sopra AB presa per diametro si descriva un semicircolo ACB, e nel punto di unione D s'innalzi al diametro AB la perpendicolare CD, che incontri in qualche punto C la periferia del circolo; sarà CD la media cercata (num. 190).

2. Soluzione in aritmetica. Si misurino le due rette date, e si trovi per esempio la prima AD di 4 braccia; la seconda di 9 braccia; si moltiplichi 9 per 4, e dal prodotto 36 si estragga la radice quadrata. Sarà 6 questa radice, e di tante braccia sarà la media cercata.

194. Teorema XVI. Se due poligoni simili ABCDE, MNOPQ (Fig.34) con rette condotte ad angoli omologi sono divisi in tanti triangoli, i triangoli di un poligono sono simili ai corrispondenti dell' altro.

Dimostrazione. In questi due poligoni sia AB : MN : : BC : NO : : CD : OP ec., l'angolo A eguale ad M, B eguale ad N, C eguale ad O, ec. I due triangoli ABC, MNO hanno eguali gli angoli BN, e i lati adjacenti a questi angoli proporzionali; dunque sono simili, e perciò sono eguali i due angoli x, y, e quindi eguali le loro differenze z, u cogli angoli interi, ed eguali C, O. Inoltre si ha AC : MO : : AB : MN : : CD : OP, cioè AC : MO : : CD : OP. Dunque i due triangoli ACD, MOP hanno e-

guali gli angoli z, u, e i lati adjacenti a questi angoli proporzionali; dunque sono simili. Proseguendo allo stesso modo si dimostreranno simili ancora gli altri triangoli corrispondenti.

195. Corollario. Ha luogo ancora la proposizione inversa della precedente, cioè due poligoni sono simili, allorchè, essendo composti di uno stesso numero di triangoli, i triangoli di uno sono simili ai triangoli dell' altro presi collo stesso ordine.

196. Problema XXIV. Sopra una data retta MN costruire un poligono simile ad un altro dato ABCD (Fig. 34).

Risoluzione. Sopra la MN si costruisca il triangolo MON simile al triangolo ABC; sopra MO si costruisca il triangolo MOP simile al triangolo ADC, e sopra MP il triangolo MPQ simile al triangolo AED, e tutto ciò in modo, che gli angoli, e i lati omologi nelle due figure siano disposti collo stesso ordine. La figura MNOPQ sarà simile alla data (num. 195).

197. Teorema XVII. I perimetri di due poligoni simili stanno tra loro come due lati omologi qualunque (Fig. 34).

Dimostrazione. Nei poligoni simili i lati omologi hanno tra loro una stessa ragione. Ora se si supponga, che il lato di uno dei poligoni sia o doppio, o triplo, o quadruplo del lato omolego dell' altro poligono, è evidente, che la somma dei lati del primo sarà o doppia, o tripla, o quadrupla della somma dei lati del secondo poligono; ma

le

le somme dei lati dei poligoni sono i perimetri degli stessi poligoni, dunque i perimetri dei poligoni simili stanno tra loro, come due lati omologi qualunque.

198. Corollario. Se i poligoni simili sono regolari, i perimetri loro stanno tra se come i loro apotemi, perchè questi sono proporzionali ai lati de' poligoni (Fig. 35).

199. In un dato circolo s'immagini iscritto un poligono regolare qualunque. Egli è evidente, che aumentando continuamente il numero dei lati di questo poligono, e sminuendo perciò la grandezza dei medesimi lati, il perimetro, e la superficie del poligono sempre più si accosteranno all'eguaglianza colla periferia, e colla superficie del circolo: dunque se si concepisca questo numero dei lati aumentato senza fine, il perimetro, e la superficie del poligono verranno a confondersi colla periferia, e colla superficie del circolo.

200. Quindi 1. Qualunque circolo può riguardarsi qual poligono regolare di un numero infinito di lati infinitamente piccoli.

2. Più circoli possono riguardarsi quai poligoni regolari di un medesimo numero infinito di lati, cioè quai poligoni regolari e simili.

3. Siccome nei poligoni regolari i perimetri stanno tra se come i loro apotemi, i quali nei circoli sono gli stessi raggi, le periferie dei circoli sono in ragione de' loro raggi, e perciò ancora dei loro diametri.

4. In diversi circoli gli archi simili, cioè

che comprendono un egual numero di gradi stanno tra loro come le loro intere periferie. Dunque gli archi simili in diversi circoli sono in ragione dei loro raggi, o dei loro diametri.

201. Archimede ricercando col mezzo del calcolo una retta eguale alla periferia di un circolo di dato diametro, ha trovato, che il diametro sia alla sua periferia prossimamente come 7 a 22. Ed Adriano Mezio Matematico Olandese spingendo più oltre questa ricerca ha trovato il rapporto più prossimo di 113 a 355. Nel decorso di questi elementi si farà uso di questo secondo rapporto.

202. Problema XXV. Dato il diametro di un circolo cercare il valore della sua periferia.

Risoluzione. Si faccia questa proporzione, come 113 sta a 355, così il diametro dato sta alla periferia cercata: questa periferia adunque si ritrova moltiplicando il diametro dato per 355, e dividendo il prodotto per 113.

203. Problema XXVI. Data la periferia di un circolo cercare il valore del suo diametro.

Risoluzione. Si faccia questa proporzione, come 355 sta a 113, così la periferia data sta al diametro cercato: dunque si ritrova il diametro moltiplicando la data periferia per 113, e dividendo il prodotto per 355.

204. Problema XXVII. Dato il diametro

di

di un circolo cercare il valore di un arco di un dato numero di gradi.

Risoluzione. Il dato arco sia per esempio di 60°. Si cerchi la periferia del circolo come nel problema XXV, e poscia si faccia questa proporzione, come 360° stanno a 60°, così la periferia trovata sta a quella parte di periferia, che corrisponde all'arco dato. Questa parte di periferia si troverà moltiplicando l'intera periferia per 60, e dividendo il prodotto per 360.

CAPO IV.

Della misura, e dell' eguaglianza della superficie.

205. Misurare la superficie o l'area di una figura significa cercare quante volte essa contiene una data superficie. Tra le superficie quella del quadrato, sembrando la più semplice, si assume per l'unità di misura di tutte quante le figure piane. Da questo modo di valutare in quadrati le aree delle figure piane è derivata l'espressione *quadrare* o determinare la *quadratura* di una data figura. Il lato del quadrato, che si prende per unità di misura delle aree, è d'ordinario quella retta, che si prende per unità nella misura delle rette, per esempio il braccio, il trabucco, il piede, l'oncia ec., e la superficie valutata in quadrati si dice esser tante braccia, trabucchi, piedi, once quadrate.

206. Teorema XVIII. Se con una ſteſsa unità si misurano le due dimenzioni, cioè la lunghezza, e la largezza di un parallelogrammo rettangolo, queſto parallelogrammo conterrà il quadrato di queſt' unità un numero di volte eguale al prodotto delle unità o parti della base moltiplicate per quelle dell' altezza.

Dimoſtrazione. Sia ABCD di parallelogrammo rettangolo (Fig.36), QR un' unità di misura QRST il suo quadrato, e misurando con QR le dimensioni AB, AD, si trovi la lunghezza AB di 4 unità, e la larghezza AD di 3. Dai punti di diviſione E, F, G del lato AB si tirino le rette EH, FI, GL parallelle al lato AD, e dai punti di diviſione M, N del lato AD si tirino le rette MO, NP, parallele al lato AB. Esaminando la figura si vede chiaro 1. che il rettangolo ABCD è diviso dalle due rette NP, MO in 3 parti eguali, che sono i tre rettangoli ABPN, NPOM, MOCD. 2. che ciascuno di questi tre rettangoli è diviso dalle rette EH, FI, GL in 4 parti eguali ciascuna delle quali è un quadrato eguale, al quadrato QRST. Dunque il rettangolo contiene 3 volte 4 quadrati di QR, cioè 12 di queſti quadrati.

In generale qualunque sia il numero delle parti delle due dimenſioni o lati AB, AD prese colla stessa unità di misura QR, il numero dei quadrati di QR contenuti dal rettangolo ABCD è eguale al numero delle parti della base AB moltiplicato pel nu-

me-

mero delle parti dell'altezza AD.

207. Corollario. La superficie di una figura si valuta dal numero dei quadrati di QR da essa contenuti ; dunque la superficie del parallelogrammo rettangolo è eguale al prodotto della sua base nella sua altezza.

208. Supponiamo ora che i due lati di un parallelogrammo rettangolo sieno misurati col trabucco, e che ciascuno di essi sia un certo numero di trabucchi, piedi, once, e punti. Moltiplicando tra loro queste due misure si avrà la superficie del parallelogrammo valutata in trabucchi quadrati con diverse frazioni, la prima delle quali esprimerà dei sesti di un trabucco, e ciascun' altra delle duodecime della frazione, che la precede immediatamente.

Per ridurre questo numero di trabucchi quadrati in pertiche, come si pratica nella misura dei terreni, è necessario di sapere, che la pertica è una superficie di 96 trabucchi quadrati, la quale però si divide in 24 parti eguali chiamate *tavole*, la tavola si divide in 12 piedi, ed il piede in 12 once ec.: laonde una tavola è la parte vigesimaquarta di 96 trabucchi quadrati, cioè è 4 trabucchi quadrati o superficiali.

Ciò premesso si riducono i suddetti trabucchi quadrati colle frazioni loro in tavole e frazioni di tavola, dividendo per 4 la parte intera, e per 2 il residuo colla parte frazionaria, osservando di ridur prima ciascun residuo nella specie della frazione seguente, e di unirvi il numeratore di que-

sta frazione (1). Se il numero delle tavole non è minore di 24, si dividerà esso numero per 24, e a destra del quoto, che esprimerà un certo numero di pertiche, si scriveranno le tavole residue colle frazioni sortite dalla divisione per 2.

Per dare un esempio di questa riduzione supponiamo, che la base del parallelogrammo rettangolo sia 21 trabucchi, 4 piedi, e 4 once, e l' altezza sia 18 trabucchi, un piede, e tre once.

Moltiplicando secondo le regole ordinarie dell' aritmetica queste due misure fra loro si trovano trabucchi quadrati 395, piedi 3, un' oncia, e 10 punti.

Dividendo i trabucchi 395 per 4 si hanno tavole 98 con un residuo di tre unità.

Moltiplicando quest' unità per 8, aggiugnendo al prodotto i piedi tre, e dividendo la somma per 2, si ottengono 10 piedi di tavola con un' unità di residuo.

Moltiplicando quest' unità per 12, aggiugnendo al prodotto i punti 10, e dividendo la somma per 2 s' hanno 11 punti.

Dunque il parallelogrammo rettangolo contiene 98 tavole, 10 piedi, 6 once, e 11 punti.

Finalmente dividendo le tavole 98 per 24 affine di avere delle pertiche, risultano per-

(1) Dopo la divisione degli interi si cambia il divisore 4 nel divisore 2 per ridurre la prima frazione, che esprime dei sesti di un trabucco superficiale, in un' altra, che esprima delle duodecime di tavola.

pertiche 4, tavole 2, piedi 10, once 6, e punti 11.

209. Teorema XIX. L' area di qualunque parallelogrammo è eguale al prodotto della sua base nella sua altezza.

Dimostrazione. Sia ABCD un parallelogrammo obliquangolo (Fig. 37). Da A, e B si tirino le rette BE, AF perpendicolari al lato CD prolungato verso F. I due triangoli rettangoli ADF, BCE, in cui sono eguali i lati AD, BC, e gli angoli adjacenti a questi lati sono perfettamente eguali. Dunque se a ciascuno di questi due triangoli si aggiugne il trapezio ABED, le due somme, cioè i due parallelogrammi ABCD, ABEF sono eguali in area. Ma l' area del parallelogrammo rettangolo ABEF è eguale al prodotto della base AB nell'altezza AF, ed il parallelogrammo obliquangolo ha la stessa base, e la stessa altezza del rettangolo, dunque l' area del parallelogrammo obliquangolo è eguale al prodotto della sua base nella sua altezza.

210. Corollario I. Tutti i parallelogrammi di egual base, e di eguale altezza, o che sono sulla stessa base, e tra le stesse parallele, sono eguali in superficie.

211. Corollario II. L' area di qualunque triangolo è eguale al semiprodotto della sua base nella sua altezza, poichè se dall' estremità B della base AB di un triangolo ABD (Fig. 38) si tiri BC parallela al lato AD, e da D la DC parallela ad AB, il triangolo ABD sarà perfettamente eguale al

triangolo BCD, e perciò sarà eguale alla metà del parallelogrammo ABCD, che ha la stessa base AB, e la stessa altezza DE.

212. Corollario III. Quindi tutti i triangoli di egual base, e di eguale altezza, o che sono posti sopra la stessa base, o tra le stesse parallele, sono eguali in superficie.

213. Corollario IV. Un triangolo è eguale alla metà di un parallelogrammo qualunque, il quale abbia un'egual base ed una eguale altezza, o che sia posto sopra la stessa base, e tra le stesse parallele.

214. Teorema XX. Se sopra i tre lati di un triangolo rettangolo ACB (Fig.39) sono costruiti tre quadrati, il quadrato formato sopra l'ipotenusa AB è eguale alla somma dei quadrati formati sopra gli altri due lati AC, BC.

Dimostrazione. Meninsi le rette AG, CE, o da C si cali CI perpendicolare alla DE, che tagli in H l'ipotenusa AB.

Il triangolo ABG, ed il quadrato BGLC hanno la stessa base BG, e sono tra le stesse parallele BG, AL (num.207); dunque il triangolo ABG è la metà del quadrato BGLC. Il triangolo BCE, ed il rettangolo BHIE hanno la stessa base BE, e sono tra le stesse parallele BE, CI; dunque il triangolo BCE è la metà del rettangolo BHIE. Ora i due triangoli ABG, BCE sono perfettamente eguali, perchè hanno eguali 1. AB, BE, che sono lati del quadrato ABED; 2. BC, e BG, che sono lati del quadrato BGLC; 3. gli angoli *yz*, *xz*,

xz, ciascuno dei quali è formato da un angolo retto, e dall'angolo z. Dunque il quadrato BGLC, ed il vicino rettangolo BHIE sono i doppj di triangoli eguali. Dunque essi sono eguali in superficie. Allo stesso modo si dimostra essere eguali in superficie il quadrato ACMN, ed il rettangolo vicino ADIH. Dunque la somma dei due rettangoli BEIH, ADIH è eguale alla somma dei due quadrati BGLC, ACMN, cioè il quadrato dell'ipotenusa AB è eguale alla somma dei quadrati dei due cateti AC, BC.

215. Corollario I. Se i due cateti AC, BC fossero eguali, sarebbero eguali i quadrati loro, e il quadrato dell'ipotenusa sarebbe doppio del quadrato di ciascun cateto.

216. Corollario II. Se fossero dati i valori numerici dei due cateti del triangolo rettangolo, si troverebbe quello dell'ipotenusa facendo i quadrati dei medesimi valori, sommando questi quadrati, ed estraendo la radice quadrata da questa somma.

217. Corollario III. Il quadrato di un cateto è eguale al quadrato dell'ipotenusa sminuito del quadrato dell'altro cateto. Quindi se fossero dati i valori numerici dell'ipotenusa, e di un cateto, si troverebbe il valore dell'altro cateto facendo i quadrati dell'ipotenusa e del cateto dato, levando questo secondo quadrato dal primo, ed estraendo la radice quadrata del residuo.

218. Teorema XXI. La superficie di un trapezio è eguale al prodotto della semi-

somma dei due lati paralleli moltiplicata per la perpendicolare condotta tra questi due lati.

Dimostrazione. Nel trapezio ABCD (Fig. 40) siano AB, CD i lati paralleli, DE perpendicolare tra questi lati, e DF parallela a CB, che divide il trapezio nel parallelogrammo FBCD, e nel triangolo ADF. Si suppongano misurate con una stessa unità le rette AB, CD, DE, e si abbiano dei numeri qualunque, a cagione d'esempio sia AB lunga 10 unità, DC 6, DE 5, e perciò BF eguale a DC sia 6 unità, e AF 4. La superficie del parallelogramma FBCD sarà di 30 unità quadrate, quella del triangolo ADF di 10, onde quella del trapezio ABCD sarà di 40 unità quadrate. La somma delle misure dei due lati paralleli AB, CD è 16 unità, e la metà di questa somma moltiplicata per le unità dell'altezza DE dà lo stesso prodotto di 40 unità quadrate. Dunque l'area del trapezio è eguale al prodotto della semisomma di due lati paralleli moltiplicata per la perpendicolare condotta tra questi due lati.

210. Corollario. Se dalla metà G del lato AD si tiri la retta GH parallela ai lati paralleli del trapezio, si avranno i due triangoli simili ADF, GDI, nei quali, per essere DG la metà di DA, sarà GI la metà di AF, cioè sarà GI di 2 unità; inoltre essendo IH eguale a DC, sarà IH di 6 unità, e GH somma di GI con IH sarà di 8. Dunque GH è eguale alla semisom-

somma dei due lati paralleli AB, CD, la quale è parimenti di 8 unità. Dunque la superficie del trapezio è eguale al prodotto del lato medio GH moltiplicato per l' altezza DE.

220. Un poligono qualunque col mezzo di diagonali si può dividere in triangoli (num. 154). Quindi per avere la superficie di qualsivoglia poligono basta dividerlo in triangoli, cercare separatamente la superficie di questi triangoli, e far la somma di queste superficie.

221. Teorema XXII. L'area di un poligono regolare qualunque è eguale al semiprodotto del suo perimetro nell'apotema.

Dimostrazione. Con rette condotte dal centro C del poligono (Fig. 41) a tutti gli angoli al perimetro si divida il poligono in tanti triangoli isosceli ed eguali quanti sono i suoi lati, e dallo stesso centro C si abbassi al lato AB la perpendicolare o apotema CH. In un punto M di una retta MN s' inalzi alla stessa una perpendicolare MP eguale all' apotema CH, e sopra la MN da M andando di seguito verso N si prendano tanti segmenti in numero, e grandezza eguali ai lati del poligono, e da P ai punti di divisione della MN si tirino delle rette, con ciò si avrà sopra la MN un triangolo MPQ diviso in tanti triangoli in numero, ed in area eguali ai triangoli isosceli, nei quali è diviso il poligono. Dunque la base, l' altezza, e l' area del triangolo MPQ sono per ordine eguali al perimetro, all' apotema,

ma, ed all' area del poligono. Ma l' area del triangolo MPQ è il semiprodotto della base MQ nell' altezza MP: dunque l' area del poligono regolare è il semiprodotto del perimetro nell' apotema.

222. Corollario I. L' area di un circolo (Fig. 42) è eguale al semiprodotto della sua circonferenza nel raggio; poichè (num. 200.) il circolo si può riguardare come un poligono regolare di un numero infinito di lati infinitamente piccoli, il cui perimetro è la circonferenza, ed il cui apotema è il raggio stesso.

223. Corollario II. L' area di un settore qualunque, cioè a dire di una porzione di circolo ADBCA compresa da due raggi CA, CB, e da un arco qualunque ADB è eguale al semiprodotto di quest' arco nel raggio.

224. Corollario III. L' area di un segmento di circolo ADBA, cioè d' una parte di circolo compresa da un arco ADB, e dalla sua corda AB è eguale alla differenza dell' area del settore ADBCA, e del triangolo isoscele ACB.

225. Scolio. Siccome l' area del circolo è prossimamente eguale a $\frac{11}{14}$ del quadrato del suo diametro, come ognun può vedere confrontando questa frazione coll' area dello stesso circolo, alcuni per avere l' area di un circolo di dato diametro fanno il quadrato di questo diametro, e prendono gli $\frac{11}{14}$ di questo quadrato.

226. Problema XXVIII. Misurare un pezzo di terreno ACDBE (Fig. 43).

Risoluzione. Con paline si divida il contorno di questo pezzo di terra in tante parti AC, CD, DB, BE, EA, le quali si possano riguardare come linee rette. Sul terreno con altre paline si segni ad arbitrio la traccia di una diagonale AB, dalla quale si possano vedere tutti i punti del contorno ove son piantate le paline, e da quasti punti si abbassino collo squadro altrettante perpendicolari alla AB, le quali divideranno il pezzo di terreno in tanti trapezj, e triangoli. Col trabucco si misurino queste perpendicolari, e le parti da esse comprese della AB. Si cerchino le superficie dei detti trapezj e triangoli, e si faccia la somma di questa superficie. Questa somma sarà la misura cercata, la quale si ridurrà in pertiche, e frazioni di pertica nel modo spiegato al num. 208.

Se la figura del pezzo di terra sia tale, che le paline piantate nel centro non si possano veder tutte da una sola diagonale, con più diagonali si dividerà questa figura in più pezzi, si cercheranno separatamente le superficie di questi pezzi, e si sommeranno le superficie ritrovate.

227. Problema XXIX. Misurare un bosco ABCDEFG, dentro del quale non si può far uso dello squadro, delle paline, e del trabucco (Fig. 44).

Risoluzione. Col mezzo dello squadro, e delle paline si circoscriva al bosco un parallelogrammo rettangolo HILM; dagli angoli del bosco si calino delle perpendicola-

ri

ri ai lati di questo parallelogrammo ; col trabucco si misurino questi lati, i loro segmenti intercetti dalle perpendicolari, e queste medesime perpendicolari. Si cerchi la superficie del parallelogrammo, e quella dello spazio compreso tra i lati del parallelogrammo, e del bosto già diviso in triangoli, e trapezj dalle suddette perpendicolari, e si sottragga questa seconda superficie dalla prima. Il residuo sarà la superficie del bosco da ridursi in pertiche, e frazioni di pertica.

CAPO V.

Della costruzione delle Mappe.

228. MAppa, *carta*, o *disegno* di un luogo è la rappresentazione di questo luogo sopra la carta, o sopra una superficie piana. Se il luogo è di poca estenzione, come sarebbe un pezzo di campagna, si riguarda esso come una superficie sensibilmente piana ed orizzontale, e sopra la carta si costituisce un piccol poligono simile a quello rappresentato in grande dalla figura dello stesso luogo.

Per costruire le mappe si richiedono degli stromenti: i più comuni sono lo squadro, il quadrante, e la tavoletta. Si richiede inoltre una scala di misura, cioè una retta divisa in parti eguali, che rappresenti in piccolo sopra la carta delle rette misurate sopra il terreno.

229. Problema XXX. Costruire una scala di misura, che rappresenti dei trabucchi, e dei piedi di trabucco.

Risoluzione. Sopra una retta AB (Fig. 45.) si prenda un numero di segmenti eguali AC, CD, DE, EB, ciascuno dei quali si supponga rappresentare un trabucco. Si divida l'ultimo segmento EB in 6. parti eguali, cioè in quel numero di parti, in cui è diviso lo stesso trabucco: la retta AB così divisa sarà la scala cercata. Per indicare con un esempio l'uso di questa scala supponiamo di dover tirare sopra la carta una retta, che rappresenti la lunghezza di 2 trabucchi, e 4 piedi. Sopra la scala AB si prenda la parte CP, in cui il segmento CE sia di 2 trabucchi, ed il segmento EP di 4 piedi, e sarà CP la retta da tirarsi sopra la carta.

Se la misura data contiene un numero di trabucchi maggiore del numero dei trabucchi o parti della scala, dal dato numero di trabucchi si levi quante volte si può il numero dei trabucchi della scala, ed il residuo si misuri sopra la stessa scala. Sopra la carta si tiri una retta indeterminata, e su questa andando di seguito da una sua estremità all'altra si prenda la lunghezza della scala tante volte, quante questa lunghezza è stata levata dal dato numero; e di più si prenda un segmento eguale all'ultimo residuo misurato sopra la scala.

Problema XXXI. Costruire una scala di misura, che rappresenti dei trabucchi, dei pie-

piedi, e delle once di trabucco (Fig.46).

Risoluzione. Col metodo del problema precedente si costruisca la scala AB dei trabucchi, e piedi di trabucco. All'estremità B di questa scala le s'inalzi una perpendicolare BG; sopra questa retta si prendano ad arbitrio 12 segmenti eguali, dall'ultimo punto di divisione G si conduca GH parallela ad AB; si compia il parallelogrammo ABGH, e si menino le altre parallele, e le diagonali come si vede nella figura. Ciò fatto si avrà la scala dei trabucchi, dei piedi, e delle once.

Uso. Con questa scala supponiamo di dover rappresentare in carta una lunghezza di 2 trabucchi, 4 piedi, e 7 once. Sopra la parallela VII. indicata dal numero delle once tra la seconda divisione CN, e la 5 diagonale *xz* si prenda la parte *qr*: sarà questa di 2 trabucchi, 4 piedi, e 7 once della scala; poichè egli è evidente, che il segmento *qv* è 2 trabucchi, il segmento *vo* è 4 piedi, ed il segmento *or*, per i triangoli simili formati dalla diagonale *xz*, e dalle rette parallele, è 7 duodecime di un piede, cioè 7 once.

Se la data misura contiene un numero di trabucchi maggiore del numero delle parti della scala, si operi nel modo indicato alla fine del problema antecedente.

231. Problema XXXII. Formare la Mappa di un pezzo di terreno collo squadro. (Fig. 43).

Risoluzione. Sopra il pezzo di terreno si fac-

facciano le prime operazioni indicate al n. 226, misurando le perpendicolari condotte alla AB, e i segmenti di questa compresi dalle stesse perpendicolari. Nell' inferior margine della carta, che deve servire per la mappa si costruisca una scala proporzionata alla grandezza della stessa mappa. Verso il mezzo della carta si tiri una retta *ab*, e sopra quella andando da un' estremità *a* all' altra *b* si prendano di seguito i segmenti *af*, *fg*, *gh*, *hb*, facendogli per ordine di altrettante parti della scala di quanti trabucchi, e parti di trabucco si sono trovati i segmenti AF, FG, GH, HB della diagonale AB. Nei punti *f*, *g*, *h*, della *ab* si tirino a questa retta le perpendicolari *fe*, *ge*, *hd*, la prima e terza al disopra, e la seconda al di sotto di *ab*, dando a ciascuna tanti trabucchi della scala quanti ne ha realmente la corrispondente perpendicolare condotta sul terreno alla AB. Finalmente si tirino le rette *ae*, *ed*, *db*, *be*, *ae*. Il poligono *aedbe* sarà la mappa del pezzo di terra ACDBE: poichè queste due figure essendo formate da uno stesso numero di parti simili poste collo stesso ordine sono rispettivamente equiangole, ed hanno i lati omologi proporzionali (1).

232.

(1) Quando si adopra lo squadro per rilevare qualche mappa in campagna non si fa che un piccolo abbozzo della figura del luogo, scrivendo sopra di esso le misure prese col trabucco. Con maggior comodo poi si forma la scala, e la mappa.

232 Problema XXXIII. Misurare una distanza innaccessibile AB col mezzo quadrante (Fig. 47).

Risoluzione. Sopra il terreno si misuri col trabucco una retta CD . Si collochi il quadrante in C, e traguardando in A, B, e D si misurino gli angoli M, N; si collochi il quadrante in D, e traguardando in C, A, B si misurino gli angoli X, Y. Con una scala si riporti CD sopra la carta, ed alle estremità della linea riportata *cd* si facciano col piccolo semicircolo graduato gli angoli *m*, *n*, *x*, *y* eguali ai corrispondenti misurati sopra il terreno, tirando le rette *ca*, *cb*, *da*, *db*, e tra i punti *a*, *b* dove queste rette s'incontrano si tiri la *ab*. Si cerchi quante parti della scala contiene la *ab*, e di altrettanti trabucchi sarà la distanza AB; poichè siccome le due figure ABCD, *abcd* sono composte di uno stesso numero di triangoli simili, e similmente posti tra loro, le distanze AB, *ab* avranno tra loro una ragione eguale a quelle delle due basi CD, *cd*.

233. Problema XXXIV. Misurare un'altezza col quadrante.

L'altezza da misurarsi può essere o accessibile, o inaccessibile alla sua base.

Risoluzione 1. Caso. Sopra il terreno si misuri col trabucco una retta orizzontale EF (Fig. 48) tirata ad arbitrio dal piede dell'altezza AE. In F si collochi il quadrante in modo che la dioptra fissa sia a livello; colla dioptra mobile si traguardi al-

la sommità A, e si osservi di quanti gradi sia l'arco DH, e di altrettanti gradi sarà l'angolo DCH eguale al suo verticale ACB. Colla scala dei trabucchi, e con un semicircolo graduato si descriva un triangolo rettangolo *bac* simile al triangolo BAC. Colla stessa scala si prenda la misura di *ab*, la quale farà conoscere quella di AB: la somma di AB coll'altezza dell'istromento CF sarà l'altezza cercata AE.

2. Caso. Sopra il terreno si misuri una retta orizzontale GF (Fig. 49) in direzione del piede dell'altezza AE; si colloehi il quadrante all'estremità F di questa retta ponendo la dioptra fissa a livello, e in direzione della GF; si traguardi colla dioptra mobile in A, e si misuri l'angolo ACB. Si collochi il quadrante all'altra estremità G della GF, mettendo la dioptra fissa a livello e in direzione di GF; si traguardi colla dioptra mobile in A, e si misuri l'angolo ADB. Sopra la carta colla scala e col semicircolo graduato si faccia un triangolo *adc* simile al triangolo ADC; dal vertice *a* si abbassi alla base prolungata la perpendicolare *ab*, e colla scala si misuri *ab*: questa misura farà conoscere quella di AB, la quale unita all'altezza CF dell'istromento darà l'altezza inaccessibile AE.

234. Problema XXXV. Rilevare il pezzo di terreno ABCDE col mezzo del quadrante (Fig. 50).

Risoluzione. Si misuri un lato AB della figura; si collochi il quadrante all'estremi-

tà

tà A di AB, e traguardando gli angoli della figura si misurino gli angoli M, N, P; si collochi il quadrante all' altra estremità B della AB, e traguardando di nuovo agli angoli della figura si misurino gli angoli X, Y, Z. Sopra la carta col mezzo di una scala proporzionata alla grandezza della mappa da farsi si misuri una retta *ab*, e con un semicircolo graduato facciansi in *a* gli angoli *m*, *n*, *p* eguali per ordine agli angoli corrispondenti M, N, P, e in *b* gli angoli *x*, *y*, *z* eguali ai corrispondenti X, Y, Z, e tra i punti d' intersecazione dei lati di questi angoli si tirino delle rette, le quali formeranno una figura *dbcde*, che sarà la mappa del pezzo di terra ABCDE, poichè queste due figure, come è evidente, sono formate da uno stesso numero di triangoli simili posti collo stesso ordine.

Della tavoletta geometrica, e del di lei uso nella formazione delle mappe.

235. La *tavoletta geometrica*, chiamata da alcuni, *tavoletta pretoriana* è un istrumento assai comodo per formare le mappe: essa è composta di due pezzi principali, cioè di una tavola di legno ABCD ben unita della figura di un quadrato di circa 12 once di lato portata da un piede, su cui può moversi per ogni verso, e di una regola di metallo MN fornita alle sue estremità di due traguardi (Fig. 51).

236. Problema XXXVI. Rilevare in carta

ta il pezzo di terreno ABCDE facendo uso della Tavoletta (Fig. 52).

Risoluzione. Poste le paline ai punti del contorno A, B, C, D, E, si misuri uno dei lati per esempio AB; all' estremità di questa base si collochi in posizione orizzontale la tavoletta, sulla quale sia disteso, e fissato un foglio di carta; su questo foglio si segni il punto *a* che corrisponde verticalmente al punto A del terreno. Al piano della tavoletta si sovrapponga la regola colle diopire, applicando uno dei suoi lati al punto *a*; da *a* si diriga questa a poter vedere coi suoi traguardi la palina posta in B; si tiri sulla carta la retta *ab*, e si faccia essa di tante parti della scala di quanti trabucchi, e parti di trabucco si è trovata la base AB. Facendo girare la regola intorno ad *a* si traguardi ancora in C, D, E, e si tirino sulla carta le rette *ac*, *ad*, *ae*. Si trasporti la tavoletta all' altra estremità della base, e vi si collochi per modo, che l' estremità *b* della *ab* corrisponda al punto B del terreno, e che la *ab* sia nella direzione di AB. Applicato un lato della regola al punto *b*, con essa si traguardi ai punti C, D, E, e si tirino le rette *bc*, *bd*, *be*, le quali intersecheranno le già condotte da *a* in alcuni punti *c*, *d*, *e*. Finalmente si tirino le rette *cd*, *de*, e si avrà sopra la carta la figura *abcde*, che sarà la mappa della figura del terreno ABCDE.

PARTE TERZA.

DE I PIANI, E SOLIDI.

CAPO PRIMO.

Dei piani.

237. LA teoria dei solidi suppone qualche nozione intorno alle proprietà più generali dei piani.

Per una retta AB (Fig. 1.) possono passare infiniti piani. Dunque una retta, o più punti posti nella stessa direzione non bastano a fissare la posizione di un piano.

Se ovunque fuori della AB si prende un punto C, è chiaro che per la AB, e per C non può passare, che un sol piano. Dunque una retta AB, ed un punto C fuori di essa, ovvero tre punti qualunque A, B, C posti in diversa direzione bastano a fissare la posizione di un piano.

238. Una retta AB (Fig. 2) dicesi perpendicolare ad un piano MN, quando cade sopra questo piano senza inclinare da veruna parte, cioè quando è perpendicolare a tutte le rette tirate dal punto B sopra questo piano.

Sopra di un piano siano tirate due rette BC, BD a qualunque angolo CBD, e sia AB perpendicolare in B a queste due rette. Immaginiamoci, che quest' angolo unitamente alla AB s' aggiri intorno al punto B, restando però sempre CBD sul piano

MN

MN . E' chiaro , che in questa rivoluzione ciascuna delle rette BC , ED si confonderà con tutte le altre rette trate per B sopra il piano , e per conseguenza la AB sarà perpendicolare a tutte queste rette, cioè al piano stesso MN. Dunque se una retta AB incontra un piano MN , ed è perpendicolare a due rette BC , BD , tirate su questo piano dal punto d' incidenza , essa AB sarà perpendicolare al piano MN.

239. Dalla natura della perpendicolare si ha 1. Che da un punto B dato in un piano MN non si può alzare a questo piano più di una perpendicolare.

2. Da un punto A dato fuori di un piano MN non si può abbassare a questo piano più di una perpendicolare.

3. Questa perpendicolare è la più corta tra quante rette si possono tirare dal punto A al piano MN. Perciò è, che la distanza di un punto ad un piano si misura sopra la perpendicolare calata da quel punto sopra questo piano.

4. Due o più rette perpendicolari ad uno stesso piano sono parallele tra loro .

240. Se due piani MN, PQ (Fig. 3) si tagliano , la loro intersecazione AB è una linea retta . Poichè se AB fosse una linea curva , o l' uno , o l' altro piano s' incurverebbe per adattarsi a questa curva , la qual cosa è impossibile .

241. Da un qualunque punto C dell' intersecazione di due piani MN, PQ si tirino da una stessa parte le due rette CD ,

CE perpendicolari ad AB, l' una in un piano, e l' altra nell' altro. L' angolo DCE formato da queste due rette è eguale all'angolo formato dai due piani dalla parte, verso la quale sono tirate le due rette.

Quindi 1. La misura dell'angolo rettilineo DCE è ancora in misura dell'angolo piano, cioè dell'angolo formato dai due piani.

2. Se quest' angolo è retto, i due piani sono tra loro perpendicolari, poichè l' uno cade sopra l'altro senza inclinare da veruna parte; e se quest' angolo è obliquo, i due piani sono tra loro obliqui.

3. Gli angoli piani adjacenti equivalgono alla somma di due retti, e gli angoli opposti al vertice sono eguali tra loro.

242. Due piani diconsi tra loro paralleli allorchè prolungati indefinitamente per ogni verso non s'incontrano mai.

Dalla natura dei piani paralleli si ha 1. che essi sono per tutto egualmente distanti tra loro.

2. Se una retta tirata tra due piani paralleli è perpendicolare ad uno di questi piani, essa è ancora perpendicolare all' altra.

3. Tutte le perpendicolari tirate tra due piani paralleli sono eguali tra loro.

243. Problema I. In un punto B di un piano MN inalzare una perpendicolare a questo piano (Fig. 4).

Risoluzione. Sopra qualche piano di materia un poco consistente, come sarebbe un pezzo di cartone DF, si tirino due rette DE, AB tra loro perpendicolari. Si tagli

questo cartone al lungo di DE, si pieghi al lungo di AB a qualunque angolo DBE, e così piegato si porti sopra il piano MN; mettendo i lati di quest'angolo sul piano, ed il vertice dello stesso nel punto B. Sarà BA perpendicolare in B al piano MN: poichè per la costruzione BA è perpendicolare in B alle due rette BD, BE poste sul piano MN (num. 238).

244. Problema II. Da un punto C dato fuori di un piano calare una perpendicolare a questo piano (Fig. 4).

Risoluzione. Sul piano MN come nel problema precedente si porti il cartone piegato ad angolo. Se la distanza del punto C dal piano non supera la lunghezza della AB, senza distaccare l'angolo DBE dal piano MN si faccia scorrere il cartone, finchè la AB tocchi il punto C, e sarà AB perpendicolare al piano MN. Se la distanza del punto C dal piano supera la lunghezza della AB in C si attacchi un filo, che arrivi sino al piano; movendo il cartone, ed il filo ben teso si cerchi di dare ad entrambi quella posizione, per cui il filo giunga ad esser parallelo, e a combaciarsi colla AB. Ciò fatto, il filo BC sarà perpendicolare al piano MN.

245. Scolio. Se il piano MN è orizzontale sarà più facile di servirsi del filo a piombo tanto per alzare, che per abbassare la perpendicolare cercata.

246. Problema III. Al piano MN nella direzione di una retta BD inalzare un pia-

no perpendicolare (Fig. 4).

Risoluzione. Nei punti B, D si alzino al piano MN le perpendicolari AB, DG, e per queste due rette, che saranno tra loro parallele, si farà passare un piano AD; sarà questo perpendicolare al piano MN.

247. Problema IV. Da un punto A preso fuori di un piano MN condurre a questo piano un altro piano parallelo (Fig. 5).

Risoluzione. Da A si abbassi al piano MN la perpendicolare AB. Da due punti qualunque di MN in diversa direzione di B si alzino a questo piano le due perpendicolari CE, DF eguali ad AB, e per i tre punti A, E, F si faccia passare un piano PQ; sarà questo parallelo al piano MN.

CAPO II.

Nozioni generali dei solidi.

248. IL solido, come già si è accennato al principio di questi elementi, è quella grandezza geometrica, che ha le tre dimensioni lunghezza, larghezza, e profondità, e che è circoscritta, e terminata da superficie, le quali sono o piane, o curve, o parte piane e parte curve (1).

Le superficie piane, che circoscrivono un solido, sono unite tra loro ai loro lati, e ai lo-

(1) Curva si chiama una superficie qualunque, sopra la quale non si possono condurre delle rette per ogni verso.

loro angoli, e formano degli angoli piani, e delle punte solide, le quali chiamansi *angoli solidi*.

249. I solidi, dei quali trattasi nella geometria elementare, sono il *prisma*, *il cilindro*, la *piramide*, il *cono*. il *poliedro*, e la *sfera*.

250. *Il prisma* è un solido compreso da due poligoni eguali e paralleli, e da più superficie piane, e parallelogramme (Fig.6.7.8). I due poligoni eguali, e paralleli diconsi *basi* del prisma, gli altri parallelogrammi, *parallelogrammi* o *piani laterali*, e i lati di questi piani tra le due basi *lati del prisma*.

Il prisma si suppone inalzato, e costruito sopra la sua base inferiore. Quindi una perpendicolare condotta da un punto qualunque della base superiore all'inferiore dicesi *altezza* del prisma, ed il prisma dicesi *retto* oppure *obliquo*, secondochè i suoi lati sono o perpendicolari o obliqui a questa base.

I prismi si distinguono dal numero dei lati delle loro basi: così un prisma dicesi *triangolare*, *quadriangolare*, *pentagono*, *esagono*, ec. secondochè la sua base è o un triangolo, o un quadrilatero, o un pentagono, o un esagono, ec.

Se le basi di un prisma sono regolari, la retta, che unisce i centri di queste basi dicesi *asse* del prisma, e se quest'asse è perpendicolare alla base, il prisma dicesi *retto*, e *regolare* (Fig. 8).

251. Un prisma (Fig. 7), le di cui basi sono parallelogrammi, si chiama *parallelepipedo*, il quale poi si distingue in *rettangolo*

se tutti i parallelogrammi, che lo formano sono rettangoli; in *obliquangolo* se essi parallelogrammi non sono tutti rettangoli; ed in *cubo*, se tutti i parallelogrammi sono quadrati.

252. Il *cilindro* è un solido compreso da due basi circolari e parallele, e da una superficie curva e rientrante, sopra la quale si possono descrivere infinite rette parallele (Fig. 9).

Questo solido può riguardarsi come un prisma, le cui basi sono due poligoni regolari di un numero infinito di lati. Quindi l'altezza, i lati, e l'asse del cilindro sono quelle stesse rette definite nel prisma.

253. La *piramide* è un solido compreso da una base rettilinea, e da più triangoli uniti nei loro vertici ad un punto solo chiamato *vertice* della piramide (Fig. 10. 11. 12). Nella piramide i lati dei triangoli, che si uniscono al vertice, diconsi *lati* della piramide, e la perpendicolare calata dal vertice sopra la base si dice *altezza* della piramide. La piramide come il prisma prende il suo nome dal numero dei lati della sua base: laonde chiamasi *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagona* ec. secondochè la sua base è un triangolo, o un quadrilatero, o un pentagono, ec. Se la base della piramide è una figura regolare, la retta, che unisce il vertice col centro di essa base dicesi *asse* della piramide; e se quest'asse è perpendicolare alla base, la piramide dicesi *retta* e *regolare*.

254. Il *cono* è un solido compreso da una base circolare, e da una superficie curva e rientrante, che termina in un sol punto detto *vertice* del cono, e sulla quale si possono descrivere infinite rette convergenti a questo stesso punto (Fig. 13).

Questo solido si può riguardare come una piramide, la cui base è un poligono regolare di un numero infinito di lati. Quindi l' altezza, i lati, e l' asse del cono sono quelle medesime rette definite nella piramide.

255. Il *poliedro* è un solido circoscritto da figure piane, e rettilinee. Esso prende il suo nome dal numero dei piani, che lo circoscrivono, perciò dicesi *tetraedro*, *pentaedro*, *esaedro* ec. se questi piani sono 4, 5, 6 ec. Nella classe dei poliedri entrano il prisma, e la piramide.

Il poliedro si chiama *regolare*, se tutti i suoi piani sono figure regolari ed eguali; ed *irregolare* se i suoi piani non sono tutti regolari ed eguali.

256. I poliedri regolari, che si possono costruire coi piani sono cinque, cioè tre formati con triangoli equilateri, uno con quadrati, ed uno con pentagoni regolari, e sono. Il *tetraedro*, che è formato da 4 eguali triangoli equilateri uniti ai loro lati, ed ai loro angoli (Fig. 14).

L' *ottaedro*, che è formato da 8 triangoli (Fig. 15).

L' *icosaedro*, che è formato da 20. triangoli (Fig. 16).

L' *esaedro* o *cubo*, che è formato da 6 quadrati (Fig. 17).

Il *dodecaedro*, che è formato da 12 pentagoni (Fig. 18).

257. Il poliedro regolare si può riguardare come composto da tante piramidi eguali e regolari quanti sono i suoi piani. Queste piramidi hanno per basi i piani stessi del poliedro, e sono riunite coi loro vertici in un punto del solido, che equidista da tutte le basi delle piramidi, e che si chiama *centro* del poliedro.

258. La *sfera* è un solido circoscritto da una sola superficie curva, i di cui punti sono tutti equidistanti da un punto preso dentro di essa chiamato centro della sfera (Fig. 19).

Nella sfera 1. tutte le rette condotte dal centro alla superficie sono eguali tra loro, e si chiamano raggi della sfera; 2. tutte le rette tirate pel centro, e che terminano di quà e di là alla superficie sono eguali tra loro, e si chiamano diametri o assi della sfera.

259. Se con un piano si taglia un solido di qualunque specie, la figura formata sopra la superficie del solido per l' incontro delle sue facce col piano secante si chiama *sezione* di questo solido.

260. Il solido si suppone generato da una figura piana, che si muove comunque di faccia, e lascia dietro di se la propria traccia. Così il prisma si riguarda come generato da un poligono AC (Fig.8), ed il cilindro da un circolo AB (Fig.9), che si muovono parallelamente a se stessi al lungo

di

di una retta AD. La piramide si suppone generata da un poligono AC (Fig.12), ed il cono da un circolo AB (Fig.13), che si muovono parallelamente a se stessi al lungo di una retta AD, e che in tutto il tempo del loro moto decrescono gradatamente in tutte le loro parti sino a svanire totalmente.

Se il poligono, ed il circolo, che generano la piramide, ed il cono si arrestano prima della loro evanescenza, i solidi generati sono un tronco di piramide, e di cono, che chiamasi *piramide troncata*, e *cono troncato parallelamente alla base* (Fig.20.21).

261. Una figura qualunque, che s'aggiri intorno ad uno dei suoi lati genera un solido, che si chiama *solido di rivoluzione*; l'area della figura genera il volume di questo solido, ed il perimetro della figura ne genera la curva superficie. Il lato intorno a cui si aggira la figura, dicesi *asse* del solido generato.

Se la figura generante è un parallelogrammo rettangolo ANMD (Fig. 9) il solido generato è un cilindro retto.

Se la figura è un triangolo rettangolo ACD; (Fig.13) e l'asse di rivoluzione CD è uno dei suoi cateti, il solido è un cono retto.

Se la figura è un trapezio, e l'asse di rivoluzione MN è perpendicolare ai due lati paralleli, il solido è un cono troncato parallelamente alla sua base (Fig.21).

Finalmente se la figura generante è un semicircolo AEB, che si rivolge intorno

al suo diametro AB, il solido che si genera è una sfera (Fig.19).

262. Nel semicircolo generante la sfera supponiamo esservi più rette perpendicolari all' asse. E' evidente 1. che queste rette nella loro rivoluzione descrivono dei circoli, i quali dividono la sfera in più parti: 2. Che questi circoli sono tanto più grandi, quanto più si avvicinano al centro: 3 Che il circolo, che passa pel centro è il più grande di tutti, e divide la sfera in due parti eguali, cioè in due *Emisferi*. Questo circolo chiamasi *circolo massimo* della sfera.

263. Si chiamano simili quei solidi, nei quali sono tra loro eguali gli angoli solidi corrispondenti, e simili le superficie terminatrici.

Quindi 1. sono simili i solidi regolari di una medesima specie, e conseguentemente le sfere; le quali si possono riguardare come poliedri regolari terminati da un' infinità di piani simili.

2. Sono simili i poliedri della medesima specie, come i primi, e le piramidi formate da un egual numero di piani simili, e similmente posti.

3. Sono simili i cilindri, ed i coni retti, o egualmente inclinati sulle loro basi, nei quali i raggi delle basi sono proporzionali agli assi.

CAPO III.

Superficie dei Solidi.

264. LA superficie di qualunque solido circoscritto da figure piane è eguale alla somma delle superficie di queste figure.

265. Teorema I. La superficie del prisma retto, non computando quelle delle due basi, è eguale al prodotto del perimetro alla base nel lato (Fig. 8).

Dimostrazione. Questa superficie è la somma della superficie dei parallelogrammi rettangoli laterali, i quali hanno tutti una medesima altezza. Ciascuno di questi rettangoli ha per base un lato del poligono inferiore, per altezza un lato del prisma, e per superficie il prodotto della sua base nella sua altezza. Dunque la superficie del prisma retto, non computando quelle delle basi, è eguale al prodotto della somma dei lati del poligono inferiore moltiplicata nel lato di esso prisma; cioè è eguale al prodotto del perimetro alla base nel lato.

266. Corollario. Il cilindro retto, potendosi riguardare come un prisma retto e regolare d'infiniti lati, la sua superficie convessa, cioè la sua superficie, non computando le basi, è eguale al prodotto del perimetro della base nel lato (Fig. 9).

367. Teorema II. La superficie della piramide regolare, non computando quella della base, è eguale al semiprodotto del pe-

rimetro della base nell' altezza comune dei triangoli laterali (Fig. 11).

Dimostrazione. Questa superficie è la somma delle superficie dei triangoli laterali, i quali sono tutti isosceli, e perfettamente eguali tra loro. Ciascuno di questi triangoli ha per base un lato del poligono inferiore, per altezza la retta condotta dal comun vertice perpendicolarmente a questo lato, e per superficie il semiprodotto della sua base nella sua altezza. Dunque la superficie della piramide regolare non computando quella della base, e eguale al semiprodotto della somma dei lati del poligono inferiore, cioè del perimetro delle base moltiplicato nell' altezza comune dei triangoli laterali.

268. Corollario. Il cono retto potendosi riguardare come una piramide retta e regolare, la sua superficie convessa, cioè la sua superficie, non computata la base, è eguale al semiprodotto del perimetro della base nel lato (Fig. 13).

269. Teorema III. La superficie laterale di una piramide regolare troncata con un piano parallelo alla base è eguale al perimetro medio, cioè descritto intorno alla piramide ad egual distanza dalle due basi parallele, moltiplicato per l' altezza di uno dei trapezj laterali (Fig. 20).

Dimostrazione. Questa superficie è la somma delle superficie dei trapezj laterali, i quali sono tutti eguali tra loro. Ora le superficie di ciascuno di questi è eguale al prodotto del lato medio nell' altezza comu-

ne

ne dei trapezj (num. 219). Dunque la superficie laterale di questa piramide troncata è eguale alla somma dei lati medj, cioè al perimetro medio moltiplicato per l' altezza di uno dei trapezj laterali.

270. Corollario I. Il cono retto troncato con un piano parallelo alla base può riguardarsi come una piramide retta, e regolare troncata parallelamente alla base. Dunque la sua superficie convessa è eguale alla periferia del circolo descritto sopra la stessa superficie convessa ad eguale distanza dalle basi parallele moltiplicata pel lato di esso cono troncato (Fig. 21).

271. Corollario II. Il valore del perimetro medio nella piramide troncata è eguale alla semisomma dei perimetri delle basi parallele, perchè in ciascuno dei trapezj laterali il lato medio è eguale alla semisomma dei due lati paralleli (n. 219). Dunque la superficie laterale della piramide regolare troncata è eguale al prodotto della semisomma dei perimetri delle opposte basi moltiplicata per l' altezza di uno dei trapezj laterali; per la stessa ragione la superficie convessa del cono retto troncato è eguale al prodotto della semisomma dei perimetri delle opposte basi moltiplicata pel lato di esso cono troncato.

272. Teorema IV. La superficie della sfera è eguale alla periferie di uno de' suoi circoli massimi moltiplicata pel suo asse.

Dimostrazione. Il circolo può riguardarsi come un poligono regolare di un numero in-

infinito di lati infinitamente piccoli. S' immagini adunque la semicirconferenza ANB (Fig. 22) divisa in una infinità di archetti eguali MN, e ciascuno di questi archetti si consideri come un lato di questo poligono regolare. Dalle estremità di MN si guidino al diametro AB le perpendicolari MP, NQ; dalla metà T dello stesso archetto meninsi TX perpendicolare ad AB, ed il raggio TC; da M si cali alla NQ la perpendicolare MR, e dal centro C s' inalzi CD perpendicolare al diametro AB.

In questa costruzione TC è perpendicolare ad MN (num.60), e TV ad MS. Dunque MTS è un triangolo rettangolo, di cui MS è l'ipotenusa, e TV è perpendicolare calata a quest' ipotenusa dal vertice dell'angolo retto in T. Dunque il triangolo MTV è simile al triangolo STV, e l'angolo MTV è eguale all'angolo TSV; ma per essere TV parallela ad NR, ed MR a CX, l'angolo MTV è ancora eguale all'angolo MNR, e l'angolo TSV all'angolo TCX. Dunque l'angolo MNR è eguale all' angolo TCX, e perciò sono simili i due triangoli rettangoli MNR, CTX, nei quali paragonando i lati omologi si ha MN: MR :: CT: TX, ovvero MN: PQ :: CD: TX.

Ciò posto fingiamo, che il semicircolo ANB faccia un' intera rivoluzione intorno al suo diametro AB. E' chiaro, che l'area del semicircolo genera la solidità della sfera, e la periferia dello stesso semicircolo genera la superficie della medesima sfera; l'area del

tra-

trapezio MPQN genera un cono retto troncato a basi parallele, il quale è uno degli elementi componenti la sfera ; ed il lato MN genera la superficie convessa di questo cono, la quale è uno degli elementi della superficie della stessa sfera ; la retta TX colla sua estremità T descrive sopra questa superficie una circonferenza di circolo, che equidista dalle basi parallele , ed il raggio CD colla sua estremità D descrive un circolo massimo della sfera.

Ora i due raggi CD , TX stanno tra loro come le loro circonferenze , cioè CD : TX :: circonferenza di CD : circonferenza di TX. Dunque sarà MN : PQ :: circonferenza di CD : circonferenza di TX : e moltiplicando tra loro i termini estremi, e i termini medj , si hanno due prodotti eguali (n. 70.) , cioè la circonferenza di TX moltiplicata per MN , e la circonferenza di CD moltiplicata per PQ. Il primo prodotto esprime la convessa superficie del cono troncato, cioè l' elemento della superficie della sfera , ed il secondo prodotto è la circonferenza del circolo massimo della sfera moltiplicata per l' altezza di esso cono elementare. Dunque ciascuno dei sopraccennati elementi superficiali della sfera è eguale alla periferia del circolo massimo moltiplicata in quella porzione dell' asse , che ad esso elemento corrisponde . Dunque la somma di tutti gli elementi superficiali della sfera è eguale alla periferia di un circolo massimo moltiplicata per la somma delle altezze di

tutti

tutti i coni troncati elementari ; cioè la superficie della sfera è eguale alla circonferenza di uno dei suoi circoli massimi moltiplicata per l'asse.

273. Corollario I. La superficie della sfera è eguale a quella di 4. circoli massimi, perchè la superficie di un sol circolo massimo è il prodotto della sua circonferenza nella metà del raggio, o quarta parte dell' asse.

274. Corollario II. La superficie della sfera è eguale alla superficie convessa di un cilindro a lei circoscritto, il quale ha per base uno dei suoi circoli massimi, e per altezza il di lei asse ; mentre la superficie di questo cilindro è eguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la sua altezza (Fig. 23).

275. Corollario III. La superficie di un segmento sferico è eguale alla periferia di un circolo massimo moltiplicata per l'altezza di esso segmento ; poichè questa superficie è la somma della superficie convessa di tanti coni troncati elementari.

CAPO IV.

Della misura dei solidi.

276. LA ricerca della misura di un solido consiste nel determinare il numero delle volte, che il volume di questo solido contiene quello di un altro solido di una grandezza conosciuta. Il cubo per essere il più

più semplice tra i solidi si assume generalmente per unità nella misura dei solidi di qualunque specie. Quindi il misurare un solido si chiama *cubare* o determinare la *cubatura* di questo solido. Il lato del cubo, che si prende per unità nella misura dei solidi è quella retta, che si prende per unità nella misura delle rette, come il braccio, il piede, il pollice ec., e la misura di un solido valutata in cubi dicesi di tante braccia, piedi, pollici, ec. cubi. Tuttociò è analogo a quanto è stato detto rapporto alla misura delle superficie.

277. Problema V. Se con una stessa unità si misurino le tre dimensioni, cioè la lunghezza, la larghezza, e l'altezza di un parallelepipedo rettangolo, questo parallelepipedo conterrà tante volte il cubo di quest'unità, quanto è il prodotto delle misure di queste tre dimensioni.

Dimostrazione. Sia AH (Fig. 24) il parallelepipedo rettangolo, TV una qualunque unità di misura, TX il suo cubo, e misurando con TV le dimensioni di AH, si trovi TV contenersi quattro volte nella lunghezza AB, due volte nella larghezza BC, e tre nell'altezza DE. Si divida pertanto AB in quattro parti eguali, BC in due, e dai punti di divisione si tirino sulla base rettangola AC delle parallele a questi lati, di maniera che questa base resti divisa in 8 quadrati, cioè in tanti quadrati eguali al quadrato di TV, quanto è il prodotto delle parti di AB nelle parti di BC (n. 206.) Sopra ciascu-

scuno di questi quadrati s'immagini inalzato un parallelepipedo rettangolo come LS; si divida l'altezza DE in tre parti eguali, e dai punti di divisione si suppongano condotti dei piani paralleli alla base AC. E' evidente, che il parallelepipedo AH sarà diviso in 8 parallelepipedi eguali ad LS, e che ciascuno di questi parallelepipedi sarà diviso in tre cubi eguali al cubo TX. Dunque il parallelepipedo conterrà 8 volte tre cubi eguali al cubo TX, cioè 24 cubi eguali a TX. Dunque esso parallelepipedo conterrà tanti cubi eguali al cubo di TV, quanto è il prodotto delle misure delle sue tre dimensioni.

278. Corollario. La misura di un solido qualunque si valuta dal numero dei cubi TV da esso contenuti. Dunque la solidità del parallelepipedo rettangolo è eguale al prodotto delle misure delle sue tre dimensioni, o ch' è lo stesso, al prodotto della superficie della sua base nella sua altezza.

279. Scolio. Nella precedente dimostrazione si è supposto, che le dimensioni del parallelepipedo fossero divisibili per TV in soli numeri interi, ma il teorema può egualmente dimostrarsi in qualunque ipotesi di numeri interi e rotti.

280. Teorema VI. La solidità di qualunque prisma retto o obliquo, è eguale alla solidità di un parallelepipedo rettangolo di egual base, e di eguale altezza.

Dimostrazione. S'immagini, che questi due solidi sieno composti di un medesimo numero infinito di strati o di lamine eguali,

li, ed infinitamente sottili disposte le une sopra le altre. E' manifesto, che essendo eguali in area le basi dei due solidi, le lamine di un solido sono eguali alle lamine dell'altro solido, e in conseguenza le somme di queste lamine componenti i due solidi sono tra loro eguali. Dunque il prisma è eguale in solidità al parallelepipedo rettangolo di egual base, e di eguale altezza.

281. Corollario I. Questa medesima dimostrazione si applica egualmente al cilindro retto o obliquo, ed al parallelepidedo rettangolo di egual base, e di egual altezza.

282. Corollario II. Siccome la solidità del parallelepipedo rettangolo è eguale al prodotto della superficie della sua base nella sua altezza, così la solidità di qualunque prisma o cilindro retto o obliquo è eguale al prodotto della superficie della sua base nella sua altezza.

283. Teorema VII. Due piramidi rette o oblique di egual base, e di eguale altezza sono eguali in solidità, qualunque sieno le figure delle loro basi.

Dimostrazione. Ciascuna piramide si può immaginare composta di un'infinità di lamine infinitamente sottili, e simili disposte le une sopra le altre, e gradatamente descrescenti dalle basi sino al vertice. Ora per essere eguali le altezze delle due piramidi, il numero infinito delle lamine componenti è lo stesso in ciascuna piramide, e per essere ancora eguali le due basi, le lamine

mine, che si corrispondono nelle due piramidi, cioè che sono egualmente distanti dalle basi, sono eguali tra loro. Dunque la totale solidità delle lamine componenti è la stessa in ciascuna piramide, vale a dire le piramidi sono eguali in solidità.

284. Corollario. Questa medesima dimostrazione si applica egualmente a due coni, ovvero ad un cono, e ad una piramide qualunque di egual base, e di eguale altezza.

285. Teorema VIII. Un prisma triangolare qualunque si divide in tre piramidi triangolari di eguale solidità.

Dimostrazione. Sia il prisma ABCDEF (Fig. 25). Sulle tre facce parallelogramme meninsi le diagonali AF, FC, AD. Con un piano condotto lungo le diagonali AF, CF si divida il prisma nelle due piramidi la triangolare ABCF, e la quadrilatera ACDEF, e con un secondo piano condotto lungo le diagonali AF, e AD si divida questa piramide quadrilatera nelle due piramidi triangolari ADCF, ADEF, così che il prisma sia diviso nelle tre piramidi triangolari ABCF, ACDF, ADEF.

La prima piramide ABCF, e la seconda ACDF sono poste sullo stesso piano BCDF, hanno per basi i due triangoli eguali CFB, CFD, ed il vertice comune A, e perciò la stessa altezza. Dunque queste due piramidi sono eguali in solidità.

Parimente sono eguali in solidità la seconda piramide ACDF, e la terza ADEF, per-

perchè sono poste sullo stesso piano ACDE, hanno per basi i due triangoli eguali ADC, ADE, ed il vertice comune F. Dunque sono eguali in solidità le tre piramidi ABCF, ABDF, ADEF, nelle quali è diviso il prisma. Dunque il prisma si divide in tre piramidi eguali.

286. Corollario I. Quindi una piramide triangolare qualunque è eguale alla terza parte del prisma triangolare posto sopra la stessa base, e tra i medesimi piani; ma la solidità di qualunque prisma è eguale al prodotto della sua base nella sua altezza. Dunque la solidità della piramide triangolare è eguale alla terza parte del prodotto della sua base nella sua altezza.

287. Corollario II. La solidità di una piramide, o di un cono qualunque è eguale alla terza parte del prodotto della sua base nella sua altezza, poichè questa piramide poligona, o questo cono è eguale ad una piramide triangolare di egual base, e di eguale altezza (num. 283. 284.).

288. Corollario III. Per avere la solidità della piramide, o del cono troncato, si calcola la solidità della piramide, o cono intero, e quella della parte levata superiormente; indi si leva questa seconda solidità dalla prima. Il residuo sarà la solidità della piramide, o cono troncato (Fig. 26. 27.).

289. Scolio. Colle regole precedenti si trovano le capacità dei recipienti, che hanno una figura prismatica o conica, per esempio dei secchioni, delle tine, delle botti,

ti, e delle bonze, si misurano i fieni disposti in mede, ed in mucchi; la legna disposte in mede, i grani nei granai, si quadrettano i minuti ec. Tutta questa pratica però non può aver luogo in questi brevi elementi; nei seguenti problemi accennerò soltanto come si misurino i recipienti da riporre il vino, che hanno la figura di cilindro, e di cono troncato a basi circolari e parallele.

290. Problema V. Cercare la capacità di un secchione cilindrico.

1. Soluzione. Col braccio si misuri l'interno diametro, e l'altezza del secchione; si calcoli l'interna circonferenza, e la superficie della base, e si moltiplichi questa ultima per l'altezza del secchione (num. 282.). Il prodotto sarà la capacità del secchione in braccia cube.

2. Soluzione. Misurato l'interno diametro, e l'altezza del secchione, si faccia il quadrato del diametro, si prendano li $\frac{11}{14}$ di questo quadrato (num. 225), e questi si moltiplichino per l'altezza del secchione: il prodotto sarà la capacità del secchione in braccia cube.

291. Scolio. Siccome un braccio cubo contiene brente 2 staja 2 quartari 2 e boccali 2 di fluido, se per questa quantità si moltiplichi la capacità del secchione calcolato in braccia cube, si avrà la misura dello stesso secchione in brente, e parti di brenta.

292. Problema IV. Cercare la capacità di un secchione o di una tina della figura

di

di un cono retto troncato a basi circolari, e parallele.

Metodo pratico. Col braccio si misurino i diametri delle due basi; si quadri ciascuno di questi diametri, e si faccia il prodotto dei due diametri semplici; si sommino insieme quei due quadrati, e questo prodotto dei diametri; da questa somma si prendano li $\frac{1}{1}\frac{1}{4}$, ed il risultato si moltiplichi per $\frac{1}{3}$ dell'altezza del secchione. Il prodotto sarà la capacità del secchione in braccia cube.

293. Corollario I. Moltiplicando questo numero di braccia cube per brente 2 staja 2 quartari 2, e boccali 2 si avrà la capacità del secchione in brente, e parti di brenta.

294. Corollario II. La botte, e la bonza sono a un dì presso due eguali secchioni uniti alle basi maggiori. Dunque, quando questi secchioni abbiano la forma indicata nel problema, raddoppiando la misura di un secchione si avrà la misura del recipiente intero.

295. Scolio. Se il recipiente non ha la figura o di cilindro o di cono troncato a basi circolari e parallele, il metodo per trovarne la capacità non appartiene alla geometria elementare.

296. Teorema IX. La sfera in solidità è eguale alla sua superficie moltiplicata per un terzo del suo raggio.

Dimostrazione. Se noi c' immagineremo, che la superficie della sfera sia composta da

un nnmero infinito di piani infinitamente piccoli, e che sopra di questi sieno costruite altrettante piramidi infinitamente sottili, le quali abbiano tutti i loro vertici al centro della sfera, capiremo manifestamente 1. che tutte queste piramidi prese insieme formeranno l' intera solidità della sfera: 2 che ciascuna delle medesime piramidi, avendo l'altezza eguale al raggio della sfera, sarà eguale al prodotto della sua base nella terza parte di questo raggio: 3. che la somma della solidità delle stesse piramidi, cioè la solidità della sfera, sarà eguale alla somma di quei piani infinitamente piccoli, ossia alla superficie della stessa sfera moltiplicata nella terza parte del raggio.

297. Corollario. Quindi per avere la solidità di una sfera, della quale sia dato l' asse, primieramente si calcolerà la periferia del circolo massimo, in seguito si moltiplicherà questa periferia per l' asse, con che si avrà la superficie della sfera (n. 272) e per ultimo si moltiplicherà questa superficie per la terza parte del raggio. Questo prodotto sarà la solidità della sfera.

IL FINE.

INDICE

DEGLI ELEMENTI DI GEOMETRIA

Esposto in forma di Tabella.

INTRODUZIONE *Pag.* 3

1 Ogni corpo ha le tre dimensioni lunghezza, larghezza, e altezza o profondità ivi

2 Nozioni della linea della superficie, e del solido ivi

3 Definizione della Geometria ivi

4 Sua distinzione in teorica, e pratica 4

5 Spiegazione dei termini assioma, teorema, problema, lemma, corollario, e scolio ivi

6 Assiomi 5

PARTE I. Geometria lineare 6

CAPO I. Di alcune proprietà della linea retta, e circolare ivi

1 Nozione del punto ivi

2 Distinzione delle linee in rette, e curve ivi

3 Principali proprietà della linea retta 7

4 Nozione del piano ivi

5 Esame della riga ivi

6 Misure diverse della linea retta 8

7 Generazione del circolo 11

8 Proprietà principali del circolo 12

CAPO II. Degli Angoli rettilinei, e della misura loro 14

1 Angoli contigui, e verticali 14
2 Angoli retti, o obliqui, e questi ottusi, o acuti 15
3 Due augoli contigui equivalgono a due retti 17
4 Due angoli verticali sono eguali tra loro 18
5 In ogni circolo gli angoli eguali al centro comprendono archi, e corde eguali 19
6 Misura degli angoli ivi
7 Fare un angolo eguale ad un altro 20
8 Fare un angolo di un dato numero di gradi 21

CAPO III. Delle rette perpendicolari, ed oblique 22
1 Loro definizione, e proprietà ivi
2 Della squadra, e del modo d' esaminarla 24
3 Da un dato punto di una retta alzare una perpendicolare ivi
4 Da un dato punto fuori di una retta condurre ad essa una perpendicolare 25
3 Dividere una data retta in due parti eguali ivi
6 Sopra una data retta presa per diametro descrivere un circolo 27
7 Dividere in mezzo un dato angolo ivi
8 Dividere in mezzo un dato arco di circolo 28
9 Cercare il centro di un dato circolo, ed arco ivi
10 Descrivere un circolo, che passi per

tre

tre punti dati in diversa direzione 29
CAPO IV. Delle Rette parallele 30
1 Loro definizione, e proprietà ivi
2 Due parallele tagliate da una terza han gli angoli opposti interno, ed esterno eguali, ed eguali gli angoli alterni 31
3 Da un punto dato fuori di una retta condurre ad essa una parallela 32
CAPO V. Dell'uso pratico di alcuni Stromenti 34
1 Del filo a piombo 35
2 Dello squadro 37
3 Del quadrante 39
4 Del livello a piombino 40
5 Del livello d'acqua 42
6 Della maniera di trovar la differenza di livello fra due punti dati ivi
PARTE II. Geometria piana 45
CAPO I. Delle Figure piane, e particolarmente dei triangoli ivi
2 Nozioni generali rispetto alle figure piane ivi
2 Nozioni generali rispetto ai triangoli 46
5 In ogni triangolo la somma dei tre angoli è eguale a due retti 47
4 Maniere diverse di conoscere l'eguaglianza di due triangoli 48
5 Del triangolo isoscele 50
6 Due corde condotte da qualunque punto della periferia di un circolo alle due estremità del diametro forman tra loro un angolo retto 51

7 Quindi si ha la maniera di alzare una perpendicolare all' estremità di una retta senza prolungarla 52
8 Costruzione del triangolo equilatero sopra una retta data ivi
9 Costruzione di qualunque triangolo con rette, e angoli dati 54
10 Circoscrivere un circolo ad un dato triangolo ivi
11 Misurare una distanza accessibile soltanto alle due estremità ivi
12 Misurare una distanza accessibile ad una sola estremità 55
CAPO II. Dei poligoni ivi
1 Nozioni generali rispetto ai quadrilateri ivi
2 In ogni parallelogrammo i lati, e gli angoli opposti sono eguali 56
3 Sopra una data retta formare un quadrato 57
4 Costruzione dei parallelogrammi rettangoli, e obliquangoli 58
5 Del centro di una figura regolare ivi
6 Degli angoli al centro 60
7 Cercare il centro di un poligono regolare ivi
8 In un dato circolo iscrivere un dato poligono regolare 61
9 Sopra una data retta descrivere un dato poligono regolare ivi
CAPO III. Delle Rette proporzionali, e delle Figure simili 62
1 Nozioni generali intorno alle ragioni, e proporzioni geometriche,

e alle loro proprietà 64
2 Tagliare due lati di un triangolo in parti proporzionali 65
3 Dividere una data retta in un dato numero di parti eguali 66
4 Divisa una retta in più parti, dividere un' altra in parti proporzionali alle medesime 70
5 Dei triangoli simili ivi
6 Cercare una quarta proporzionale a tre rette date 73
7 Cercare una terza continuamente proporzionale a due rette date 74
8 Cercare una media proporzionale a due rette date ivi
9 Dei poligoni simili 75
10 I perimetri di due poligoni simili stanno tra loro come due lati omologhi qualunque 76
11 Le periferie dei circoli stanno tra loro come i diametri 77
12 Ragione del diametro alla periferia di un circolo 78
CAPO IV. Della Misura, e dell' Eguaglianza delle Superficie 79
1 Misura di un parallelogrammo rettangolo ivi
2 Misura del medesimo col trabucco ivi
3 Misura del parallelogrammo obliquangolo 82
3 Misura di un triangolo 83
4 In un triangolo rettangolo il quadrato dell' ipotenusa è eguale alla som-

somma dei quadrati degli altri due lati 84
6 Misura di un trapezio 85
7 Misura di un poligono qualunque 86
8 Misura di un poligono regolare ivi
9 Misura di un circolo, di un settore, e di un segmento ivi
10 Misura di un pezzo di terreno 87
11 Misura di un bosco, ove non si possa far uso dello squadro, e del trabucco 88
CAPO V. Della Costruzione della Mappe 90
1 Costruzione di una scala di misura ivi
2 Formare la mappa di un pezzo di terreno collo squadro 92
3 Misurare col quadrante una distanza inaccessibile 93
4 Misurare un' altezza col quadrante 94
5 Rilevare un pezzo di terreno col mezzo del quadrante 95
6 Tavoletta geometrica, o pretoriane, e suo uso 96
PARTE III. Dei Piani, e Solidi 98
CAPO I. Dei Piani ivi
1 Nozioni generali intorno ai piani ivi
2 Da un punto dato in un piano alzare una perpendicolare 99
3 Da un punto dato fuori di un piano calare ad esso una perpendicolare ivi
4 Fare un piano parallelo ad un altro 102
CAPO II. Nozioni generali dei Solidi ivi

1 Del Prisma 103
2 Del cilindro 104
3 Della piramide ivi
4 Del cono 105
5 Del poliedro ivi
6 Della sfera 106
7 Dei solidi simili ivi

CAPO II. Delle superficie dei Solidi 109

1 Superficie del prisma, e del cilindro retto ivi
2 Superficie della piramide, e del cono retto 110
3 Superficie di una piramide, e di un cono troncato ivi
4 Superficie della sfera 111

CAPO IV. Della Misura dei Solidi 114

1 Misura di un parallelepipedo rettangolo 115
2 Misura di qualunque prisma o cilindro 117
3 Misura di qualunque piramide o cono 120
4 Cercare la capacità di un secchione cilindrico ivi
5 Cercare la capacità di un secchione della figura di un cono retto troncato a basi circolari, e parallele 121
6 Solidità della sfera 122

FINE.

NOTA DE' LIBRI

Che in numero ſi trovano preſſo Saverio d' Onofrio e Raffaele Palma ſtrada S. Liguoro n.38. e 43.

Soave (Franc.) Trattato Elementare dei Doveri dell' Uomo , operetta dalla vegliante e saggia economia del Governo della Lombardia Auſtriaca propoſta a' giovanetti nelle Scuole per modello ed esemplare ec. 12. Nap. 1794. gr. 10.

—— Elementi della Pronunzia , e dell' Ortografia Italiana ad uso delle Scuole d' Italia 12. ivi 1794. gr. 10.

—— Abbecedario con una raccolta di massime , proverbj , e favolette morali , e colle Tabelle della cognizione delle Lettere , del Compitare, e Sillabare , e del Leggere, ad uso delle Scuole d' Italia . 12. ivi 1794. gr. 10.

—— Elementi di Geometria teorico pratica ad uso delle Scuole . ivi 1802. gr. 25.

—— Traduzione degli Idili di Gessner 12. ivi 1802. gr. 15.

—— Elementi di Aritmetica ad uso delle Scuole d' Italia 12. vol. 3. ivi 1802. gr. 50.

—— Istituzioni di Logica , Metafisica , ed Etica 12. vol. 6. Nap. 1801. duc. 1-20.

Caravelli (Vito) Elementi di Aritmetica. 8. Nap. 1801. gr. 20.

Ele-

Caravelli (Vito) Elementi di Geometria piana 8. ivi 1801. fig. gr.30.

Martino (Pietro) Nuove Istituzioni di Aritmetica pratica 8. Nap. 1800. gr.20.

—— degli Elementi della Geometria piana composti da Euclide Magarese 12. Nap. 1801. gr.20.

—— (Nic.) Elementa Geometriæ planæ, seu elementorum Euclidis ec. 12. Neap. 1801. gr.20.

Falconieri (Ign.) Introduzione alla Poesia latina ed italiana, o siano i principali precetti per ben verseggiare nell' una e nell' altra lingua ec. edizione sesta 12. Nap. 1798. gr.5.

de Gennaro (Ant.) Poesie scelte 12. Nap. 1795. gr.20.

Buommattei (Ben.) della Lingua Toscana 4. Nap. 1789. gr.60. ligato.

Morardo (Gasp.) l' Uomo guidato dalla ragione, etica dimostrativa 12. vol.3. Nap. 1794. gr.45.

Duquesne (Ab.) le Grandezze di Maria esposte in Meditazioni per ogni ottava della festività di Maria Vergine 12. vol. 2. Nap. 1796. gr.50.

de Franci (Gaet.) Verità della Religione Cristiana dimostrata contro i Moderni Increduli 8. vol. 5. Nap. 1795. duc. 1—50.

Dizionario portatile di Morale e Canonica tratto dalle Opere di Benedetto XIV. da Monsig. Giandomenico Mansi 8. Nap. 1795. gr.30.

Micheli (P. Andr.) Vite de' Santi e Per-

so-

sonaggi illustri dall' antico Testamento ec. vol. 6. Nap. 1792. duc. 1 --80.

Nuovo esemplare di Caratteri di Gennaro Tronte, e di altri più accreditati Moderni Scribendi Inglesi; Francesi, ed Italiani, in 20. rami in 4° di carta reale. Nap. 1800. gr. 20.

Young (Ed.) le Notti, trad. dall' inglese dall' Ab. Alberti, corrette ed accresciute del Trionfo della Religione, ed altri pezzi interessanti, con varie annotazioni &. tom. 2. Nap. 1779. gr. 50.

Rollin (Carl.) della Maniera d' insegnare e studiare le Belle Lettere 12. tom. 4. Nap. 1792. duc. 1 --20. ligati.

Si avverte che i suddetti libri sono tutti ligati in rustico.

A01 146 1352

Fig 3

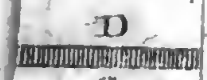
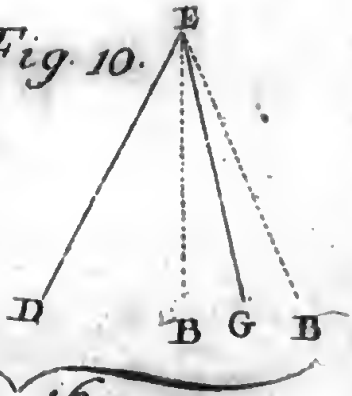
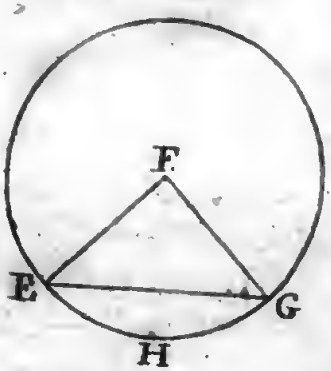


Fig. 10.



g 13

16.



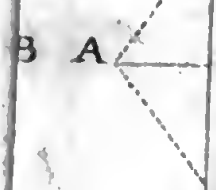
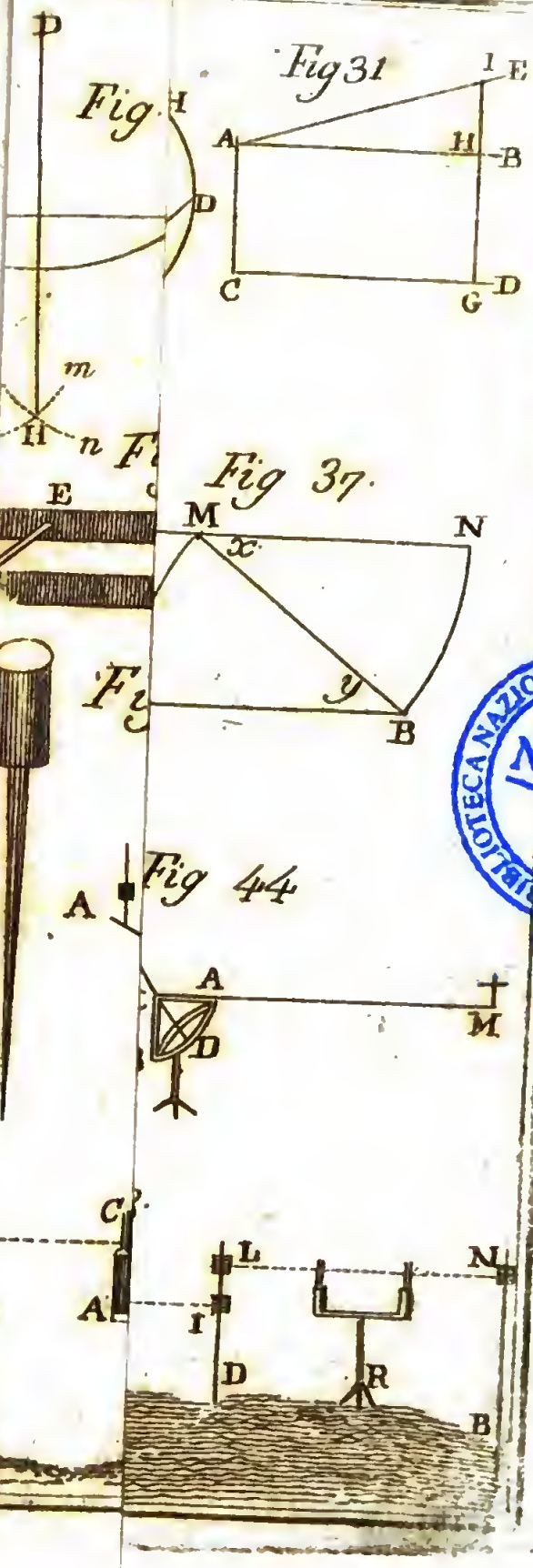


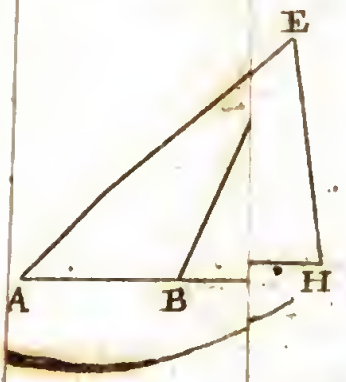
Fig 22

B

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI



BIBLIOTECA NAZIONALE - VITTORIO EMANUELE III - NAPOLI



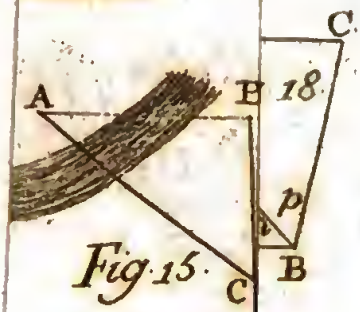


Fig. 15.

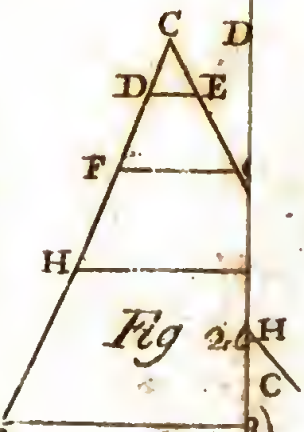
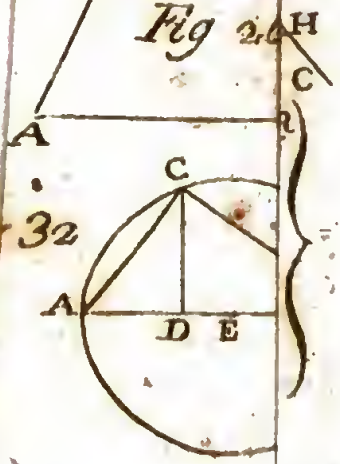


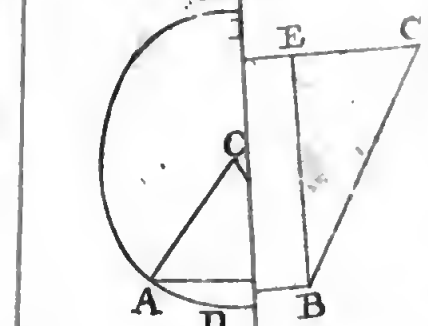
Fig 2.



32

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Fig. 1.



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III"
NAPOLI

Fig 8

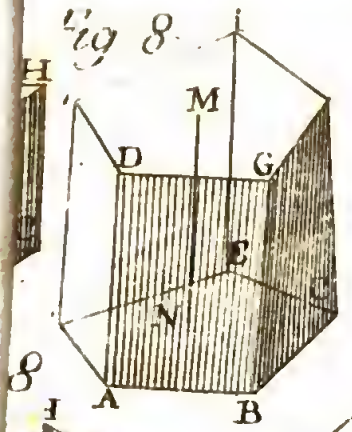
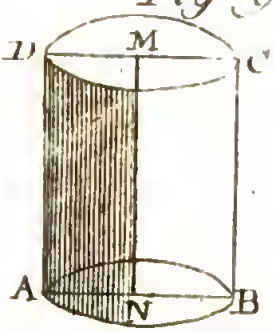


Fig 9



8

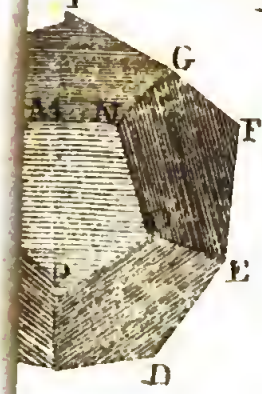


Fig 19

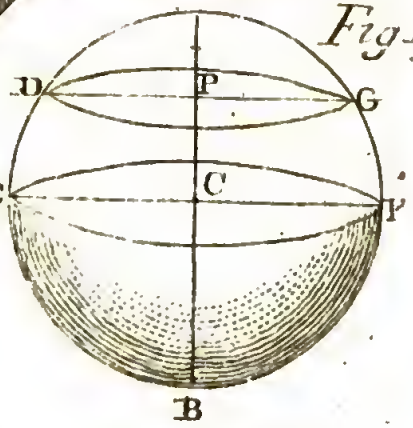


Fig 26

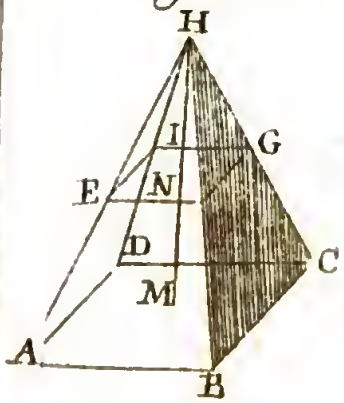
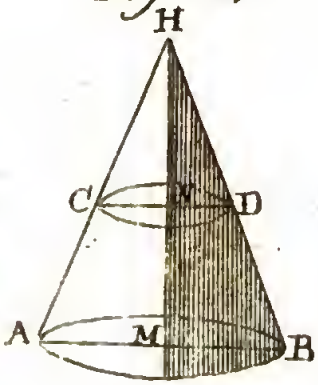


Fig 27.



A01485 1352